

**Filipe Gonçalo Marques Correia**

**MODELAÇÃO E RESPOSTA DE VIAS FERROVIÁRIAS  
PARA CARGAS MÓVEIS**

**Lisboa**

**2010**



**FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**

**Departamento de Engenharia Civil**

**Modelação e resposta de vias ferroviárias para cargas móveis**

**Filipe Gonçalo Marques Correia**  
(Licenciado em Engenharia Civil)

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil - Estruturas e Geotecnia

Orientador: Doutor Manuel Américo de Jesus Gonçalves da Silva

Júri

Presidente: Doutora Ildi Cismasiu

Vogais: Doutora Zuzana Dimitrovová

Doutor Manuel Américo de Jesus Gonçalves da Silva

**Lisboa**

**2010**

# Agradecimentos

A conclusão desta dissertação é o culminar de um objectivo académico e pessoal que sem o auxílio, em vários aspectos, de diversas pessoas não seria possível atingir. Assim, aproveito deste modo para agradecer às pessoas que directa, e indirectamente, contribuíram para que conseguisse concluir esta etapa na minha vida:

- Ao Professor Manuel Américo Gonçalves da Silva e ao Engenheiro José Nuno Varandas pela amizade, orientação e disponibilidade que sempre manifestaram ao longo deste último ano lectivo;
- Aos meus pais, irmão e namorada pela paciência, amor, carinho e dedicação com que sempre me apoiaram e tiveram do meu lado. Agradeço, também, por todos os esforços que fizeram ao longo do meu percurso académico;
- À restante família, nomeadamente ao avô, tios e primos, que frequentemente me perguntavam como corria e, ao mesmo tempo, me davam força. Foram, também, importantes na realização deste trabalho;
- A todos os amigos que comigo conviveram ao longo deste percurso. Todos, cada um à sua maneira, tiveram a sua importância;
- Aos familiares, que embora não estejam presentes fisicamente, sei que estiveram sempre comigo.

A todos o meu profundo e sincero agradecimento.



# Resumo

A circulação de veículos ferroviários sobre uma determinada via, provocam esforços que, por sua vez, se propagam para os meios subjacentes.

Desta forma, no presente trabalho elaboraram-se vários cálculos numéricos e analíticos, para vias ferroviárias fundadas em diferentes solos de fundação e sujeitas a diferentes cargas a actuar sobre distintos carris, com o principal objectivo de determinar os esforços transmitidos às vias, nomeadamente os deslocamentos provocados por uma carga de roda, as forças transmitidas às travessas, a influência que o espaçamento destes elementos apresentam, entre outros.

O cálculo destes esforços por estas duas metodologias de cálculo, solução analítica e a solução numérica, permitiu efectuar uma comparação entre os resultados determinados através de ambas as soluções.

Apresentam-se, também, os resultados obtidos para um estudo efectuado baseado numa simulação numérica de uma via ferroviária sujeita à acção de uma carga de roda dinâmica.

Com a realização deste trabalho, verificou-se que o estudo numérico aqui desenvolvido apresenta resultados muito semelhantes à solução analítica. Deste modo, o modelo numérico baseado no método dos elementos finitos, desenvolvido ao longo desta dissertação, permitiu, para além de simular de forma realista e completa situações verídicas de determinadas vias ferroviárias, superar as limitações que, eventualmente, surgem através do cálculo analítico, sendo, desta forma, uma excelente alternativa a este cálculo, nomeadamente para problemas dinâmicos onde este apresenta muitas limitações.

**Palavras-chave:** Via ferroviária; modelo numérico; solução analítica; carga estática; carga dinâmica; modelo de Winkler; rigidez vertical da via; módulo da via; variação de rigidez



# Abstract

The movement of railway vehicles on a certain rail, lead efforts which, in turn, spread to the underlying media.

Thus, in this work were prepared several analytical and numerical calculations for railways based on different soil foundation and subjected to different wheel loads acting on different tracks, with the primary aim of determine the stresses transmitted to the tracks, especially the displacements caused by a load of wheel forces transmitted to the sleepers, the influence that the spacing of these elements present, among others.

The calculation of these efforts by these two methods of calculation, the analytical solution and numerical solution, allow for a comparison between the results determined by both solutions.

We present also the results for a study based on numerical simulation of a railway subject to the action of a dynamic wheel load.

With this work, it was found that numerical simulation developed here shows very similar results to the analytical solution. Thus, the numerical model based on the finite element method developed in this dissertation, allowed, in addition to simulate realistically truthful and complete situations of certain railway, overcome the limitations that eventually arise from the analytical calculation and is thus an excellent alternative to this calculation, particularly for a dynamic problems where it has several limitations.

**Key-words:** rail track; numerical model; analytical solution; static load; dynamic load; Winkler model; vertical track stiffness; track modulus; track transition





# Simbologia

$[C]$	Matriz de amortecimento
$[K]$	Matriz de rigidez da viga
$[M]$	Matriz de massa
$\alpha$	Relação entre a velocidade de circulação da carga de roda e a velocidade crítica
$\ddot{\bar{u}}_v$	Vector de aceleração para o problema dinâmico do modelo numérico
$\dot{\bar{u}}_v$	Vector de velocidade para o problema dinâmico do modelo numérico
$\bar{u}_v$	Vector de deslocamentos generalizados para o problema dinâmico do modelo numérico
$\bar{F}$	Vector de forças aplicadas à viga
$\bar{w}$	Vector de deslocamentos
$\beta$	Rigidez relativa entre a viga e o terreno de fundação
$\delta$	Função Delta-Dirac
$\eta(x)$	Função que representa a linha característica da deformada para uma carga concentrada aplicada na origem
$\mu(x)$	Função que representa a linha característica do momento flector para uma carga concentrada aplicada na origem
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\omega$	Frequência circular
$\phi_i(x)$	Função de interpolação, ou função de forma, no grau de liberdade $i$
$\psi$	Parâmetro de integração
$\rho$	Massa volúmica do semi-espço
$\sim$	Valor de previsão utilizado no processo de integração
$\theta$	Rotação para uma viga semi-infinita
$\Delta t$	Intervalo de tempo

$\Upsilon$	Parâmetro de correcção utilizado no processo de integração
$\varepsilon$	Valor limite de deslocamento previamente estabelecido
$\varphi$	Parâmetro de integração
$\xi$	Parâmetro de correcção utilizado no processo de integração
$\zeta$	Relação entre o amortecimento e o amortecimento crítico
$A$	Área de contacto travessa-balastro
$C$	Constante de Winkler
$c$	Amortecimento da fundação via ferroviária
$C'$	Amortecimento de Rayleigh
$c_{rd}$	Constante de amortecimento visco-elástico
$D$	Momento interno aplicado a uma viga semi-infinita
$d$	Espaçamento entre travessas
$E$	Módulo de elasticidade
$EI$	Rigidez de flexão
$F$	Carga concentrada aplicada numa viga semi-infinita
$F_{amort.}$	Força exercida pelo amortecedor
$F_a$	Forças de interacção
$F_d$	Força de resistência devido ao amortecimento
$F_e$	Força de resistência devido à deformação
$F_g$	Força gravítica
$F_i$	Força de resistência devido à inércia
$F_{mola}$	Força exercida pela mola
$F_{Trav}^i$	Força transmitida à travessa i
$G$	Módulo de corte
$I$	Momento de inércia
$K$	Rigidez vertical da via
$k$	Resistência vertical da via

$k_c$	Matriz de rigidez condensada
$k_{ij}$	Coefficiente de rigidez segundo a direcção i devido ao deslocamento imposto no grau de liberdade j
$k_{mola}$	Matriz de rigidez das molas
$L$	Comprimento característico ou comprimento elástico do sistema solo/viga
$L_t$	Comprimento de transição
$M$	Momento aplicado numa viga semi-infinita
$m$	Massa da viga por unidade de comprimento
$M(x)$	Momento flector no carril, em x, provocado pela carga de roda aplicada
$n$	Intervalo de tempo de integração em utilização
$p$	Força de suporte do carril por unidade de comprimento
$p'$	Tensão transmitida ao solo
$Q$	Carga aplicada à via ferroviária
$q(x)$	Carga uniformemente distribuída
$q(x, t)$	Carregamento variável sobre a via ao longo do tempo
$u$	Módulo da via
$u_c$	Ponto de contacto da travessa com o balastro
$u_t$	Deslocamento vertical das travessas
$V$	Esforço interno de corte aplicado a uma viga semi-infinita
$v$	Velocidade de circulação da carga de roda
$v_{cr}$	Velocidade crítica
$v_{s,30}$	Valor médio da velocidade de propagação de ondas de corte nos 30m superiores do perfil de solo
$w$	Deslocamento vertical do carril
$w_{aproximado}$	Deslocamento obtido através da solução numérica
$w_{din}$	Deslocamento provocado por uma carga de roda a circular com determinada velocidade
$w_{est}$	Deslocamento provocado por uma carga de roda estática
$w_{exacto}$	Deslocamento obtido através da solução analítica

$w_i$	Deslocamento considerado no grau de liberdade i
$w_{max}$	Máximo deslocamento provocado pela aplicação da carga de roda
$w_T$	Deslocamento total provocado por um comboio de cargas
$x_f$	Limite superior da área de influência de uma travessa
$x_i$	Limite inferior da área de influência de uma travessa

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Objectivos . . . . .	2
1.3	Estrutura da dissertação . . . . .	3
1.4	Elementos constituintes de uma via ferroviária . . . . .	4
1.4.1	Carril . . . . .	5
1.4.2	Sistema de fixação . . . . .	6
1.4.3	Travessas . . . . .	6
1.4.4	Balastro . . . . .	7
1.4.5	Sub-balastro . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Modelação do sistema</b>	<b>9</b>
2.1	Formulação do problema . . . . .	9
2.2	Resistência vertical da via . . . . .	13
2.3	Solo . . . . .	14
2.4	Ações . . . . .	16
2.4.1	Carga de roda $Q$ . . . . .	16
2.4.2	Carril . . . . .	17
2.5	Amortecimento . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Problema estático</b>	<b>19</b>
3.1	Solução analítica . . . . .	19
3.1.1	Carga concentrada sem variação de rigidez . . . . .	19
3.1.2	Carga concentrada com variação de rigidez . . . . .	25
3.1.3	Comboio de cargas sem variação de rigidez . . . . .	28
3.2	Solução numérica . . . . .	33
3.2.1	Carga concentrada sem variação de rigidez . . . . .	41
3.2.2	Comboio de cargas sem variação de rigidez . . . . .	44
3.2.3	Carga concentrada com variação de rigidez . . . . .	48
3.2.4	Força transmitida às travessas . . . . .	51
3.2.5	Influência do espaçamento das travessas . . . . .	59

<b>4</b>	<b>Problema dinâmico</b>	<b>63</b>
4.1	Solução analítica . . . . .	63
4.1.1	Carga concentrada sem variação de rigidez . . . . .	67
4.2	Solução numérica . . . . .	74
4.2.1	Carga concentrada com variação de rigidez . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>

# Lista de Figuras

1.1	Corte transversal de uma linha ferroviária balastrada . . . . .	4
1.2	Perfil de carril criado por Vignole . . . . .	5
2.1	Modelo de Winkler - molas ligadas a uma camada incompressível . . . . .	10
2.2	Modelo de cálculo utilizado . . . . .	10
2.3	Viga infinita em fundação elástica . . . . .	11
2.4	Esforços actuantes num segmento infinitesimal $dx$ de um carril . . . . .	11
3.1	Representação do modelo de cálculo . . . . .	21
3.2	Vias ferroviárias fundadas em solo rijo, sujeitas a uma carga de $80kN$ aplicadas em diferentes tipos de carris . . . . .	22
3.3	Vias ferroviárias fundadas em solo rijo, constituídas por um carril <i>UIC</i> – 60, sujeitas a diferentes cargas de roda . . . . .	22
3.4	Vias ferroviárias fundadas em solo mole, sujeitas a uma carga de $80kN$ , aplicadas a diferentes tipos de carris . . . . .	23
3.5	Vias ferroviárias fundadas em solo mole, constituídas por um carril <i>UIC</i> – 54, sujeitas a diferentes cargas de roda . . . . .	24
3.6	Vias ferroviárias fundadas em diferentes tipos de solos, sujeitas a uma carga de $80kN$ aplicada num carril <i>UIC</i> – 54 . . . . .	25
3.7	Modelo de cálculo apresentado para uma carga concentrada estática aplicada numa via com variação de rigidez da fundação . . . . .	26
3.8	Esforços internos: força de corte $V$ e momento flector $D$ . . . . .	27
3.9	Esquema representativo de uma carruagem e os seus elementos constituintes .	28
3.10	Modelo de cálculo utilizado para obtenção de esforços de um comboio de cargas com quatro eixos . . . . .	28
3.11	Comboio de cargas a actuar em solos rijos, com carga de $80kN$ aplicada em diferentes tipos de carris . . . . .	30
3.12	Comboio de cargas a actuar em solos rijos, constituídas por carril <i>UIC</i> – 60, sujeitas a diferentes tipos de cargas . . . . .	30
3.13	Comboio de cargas a actuar em solos moles, com carga de $100kN$ aplicada em diferentes tipos de carris . . . . .	31
3.14	Comboio de cargas a actuar em solos moles, constituídas por carril <i>UIC</i> – 54, sujeitas a diferentes tipos de cargas . . . . .	31

3.15	Comparação de vias, fundadas em solo rijo e solo mole, constituídas por um carril <i>UIC</i> – 60 sujeita a uma carga de $80kN$ . . . . .	32
3.16	Discretização de uma viga de Euler-Bernoulli, constituída por seis elementos finitos . . . . .	35
3.17	Solução analítica e numérica obtidas para uma carga de $80kN$ aplicada num carril <i>UIC</i> – 60, fundada num solo rijo . . . . .	39
3.18	Área compreendida entre as duas soluções - solução analítica e solução numérica	40
3.19	Modelo adoptado para determinação dos deslocamentos e dos esforços na via	40
3.20	Modelo de cálculo utilizado para o cálculo de deslocamentos provocado por uma carga concentrada estática . . . . .	41
3.21	Via ferroviária constituída por um carril <i>UIC</i> – 60 sujeita a uma carga de $112.5kN$ , em solo rijo . . . . .	42
3.22	Via ferroviária constituída por um carril <i>UIC</i> – 60 sujeita a uma carga de $112.5kN$ , em solo mole . . . . .	43
3.23	Resultados obtidos em diferentes vias ferroviárias para um modelo numérico com comprimento de $16.8m$ . . . . .	45
3.24	Modelo de cálculo utilizado para simular um comboio de cargas . . . . .	45
3.25	Comboio de cargas - Via ferroviária constituída por um carril <i>UIC</i> – 54 sujeita a uma carga de $80kN$ . . . . .	46
3.26	Comboio de cargas - Via ferroviária constituída por um carril <i>UIC</i> – 60 sujeita a uma carga de $80kN$ . . . . .	46
3.27	Comboio de cargas - Via ferroviária constituída por um carril <i>UIC</i> – 60 sujeita a uma carga de $80kN$ . . . . .	47
3.28	Comboio de cargas - Via ferroviária constituída por um carril <i>UIC</i> – 60 sujeita a uma carga de $100kN$ . . . . .	47
3.29	Modelo adoptado para determinação de deformações - Variação brusca de rigidez <i>I</i> . . . . .	49
3.30	Modelo adoptado para determinação de deformações - Variação brusca de rigidez <i>II</i> . . . . .	49
3.31	Modelo adoptado para determinação de deformações - Aumento gradual de rigidez . . . . .	49
3.32	Deformações para as duas situações. Para variação brusca de rigidez o solo mole tem $7.2m$ de comprimento . . . . .	50
3.33	Deformações para as duas situações. Para a variação brusca de rigidez o solo mole tem $1.8m$ de comprimento . . . . .	50
3.34	Modelo de cálculo utilizado para obtenção dos esforços transmitidos às travessas	52
3.35	Comparação dos resultados obtidos para ambas as soluções - Carga de $80kN$ aplicada num carril <i>UIC</i> – 54 . . . . .	53
3.36	Comparação dos resultados obtidos para ambas as soluções - Carga de $80kN$ aplicada num carril <i>UIC</i> – 60 . . . . .	55
3.37	Comparação dos resultados obtidos para ambas as soluções - Carga de $80kN$ aplicada num carril <i>UIC</i> – 60 . . . . .	57



3.38	Comparação dos resultados obtidos para ambas as soluções - Carga de $100kN$ aplicada num carril $UIC - 60$ . . . . .	58
4.1	Modelo utilizado para uma carga $Q$ em movimento com velocidade $v$ . . . . .	63
4.2	Modelo de cálculo utilizado . . . . .	67
4.3	Deformada obtida num carril $UIC - 60$ sujeita a uma carga de $80kN$ , para uma velocidade de $70m/s$ . . . . .	69
4.4	Deformada obtida num carril $UIC - 54$ sujeita a uma carga de $80kN$ , para uma velocidade de $70m/s$ . . . . .	70
4.5	Deformada obtida num carril $UIC - 60$ sujeita a uma carga de $80kN$ , para uma velocidade de $60m/s$ . . . . .	71
4.6	Deformada obtida num carril $UIC - 54$ sujeita a uma carga de $80kN$ , para uma velocidade de $60m/s$ . . . . .	72
4.7	Modelo unidimensional utilizado para determinação dos esforços pretendidos .	75
4.8	Comportamento das molas de rigidez bi-linear . . . . .	75
4.9	Via ferroviária assente sobre diferentes tipos de fundação . . . . .	79
4.10	Aumento da rigidez da via de forma gradual . . . . .	81
4.11	Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo $I$ . . . . .	82
4.12	Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo $II$ . . . . .	83
4.13	Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo $III$ . . . . .	83
4.14	Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo $IV$ . . . . .	84
4.15	Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo $V$ . . . . .	84
4.16	Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo $VI$ . . . . .	85
4.17	Transmissibilidade nas travessas para a via tipo $I$ e tipo $IV$ , para uma velocidade de $80km/h$ . . . . .	86
4.18	Transmissibilidade nas travessas para a via tipo $II$ e tipo $V$ , para uma velocidade de $80km/h$ . . . . .	86
4.19	Transmissibilidade nas travessas para a via tipo $III$ e tipo $VI$ , para uma velocidade de $80km/h$ . . . . .	87



# Lista de Tabelas

2.1	Valores característicos da rigidez vertical da via, $K$ . . . . .	14
2.2	Definição de vários tipos de terrenos . . . . .	14
2.3	Valores determinados para caracterização do módulo da via, $u$ . . . . .	15
2.4	Classificação da qualidade de solos de acordo com <i>International Union of Railways</i> 16	
2.5	Categorias de vias ferroviárias . . . . .	17
2.6	Rigidez à flexão dos carris $UIC - 54$ e $UIC - 60$ . . . . .	18
3.1	Deslocamentos em solos rijos . . . . .	23
3.2	Deformações em solos moles . . . . .	24
3.3	Rigidez das molas para o modelo numérico . . . . .	41
3.4	Deslocamento para uma via ferroviária, fundada em solo rijo, sujeita à acção de uma carga de $112.5kN$ aplicada num carril $UIC - 60$ . . . . .	42
3.5	Deslocamento para uma via ferroviária, fundada em solo mole, sujeita à acção de uma carga de $112.5kN$ aplicada num carril $UIC - 60$ . . . . .	43
3.6	Força transmitida a cada travessa - Carga de $80kN$ aplicada num carril $UIC - 54$	54
3.7	Força transmitida a cada travessa - Carga de $80kN$ aplicada num carril $UIC - 60$	55
3.8	Força transmitida a cada travessa - Carga de $80kN$ aplicada num carril $UIC - 60$	56
3.9	Força transmitida a cada travessa - Carga de $100kN$ aplicada num carril $UIC - 60$	57
3.10	Transmissibilidade da força para a travessa 1 - $Q = 80kN$ ; $UIC - 54$ . . . . .	60
3.11	Transmissibilidade da força para a travessa 1 - $Q = 80kN$ ; $UIC - 60$ . . . . .	60
3.12	Transmissibilidade da força para a travessa 1 - $Q = 80kN$ ; $UIC - 60$ . . . . .	60
3.13	Transmissibilidade da força para a travessa 1 - $Q = 100kN$ ; $UIC - 60$ . . . . .	61
4.1	Valores característicos de $\alpha$ . . . . .	66
4.2	Comparação dos deslocamentos obtidos para um carril $UIC - 60$ e uma carga de $80kN$ . . . . .	69
4.3	Comparação dos deslocamentos obtidos para um carril $UIC - 54$ e uma carga de $80kN$ . . . . .	70
4.4	Comparação dos deslocamentos obtidos para um carril $UIC - 60$ e uma carga de $80kN$ . . . . .	72
4.5	Comparação dos deslocamentos obtidos para um carril $UIC - 54$ e uma carga de $80kN$ . . . . .	73

4.6	Definição dos parâmetros caracterizadores da via . . . . .	80
4.7	Tipos de vias ferroviárias estudadas . . . . .	81

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

O aparecimento da primeira linha ferroviária teve origem no início do século *XVI*, em Inglaterra, com o objectivo de transportar carvão e minério de ferro que eram extraídos de minas. Desde essa época até à presente data, e tendo como principal objectivo a sua evolução, este meio de transporte tem estado em constante transformação.

Os veículos ferroviários tiveram um papel preponderante no desenvolvimento das grandes cidades actuais. A sua contribuição foi de tal modo grande, que foram considerados os mais rápidos e eficazes no transporte de bens e de pessoas.

Ao longo dos últimos tempos, e após alguns anos de estagnação, as vias ferroviárias têm estado numa nova fase de evolução, como demonstra o aparecimento das linhas de alta velocidade. Deste modo, e para que acompanhe o desenvolvimento de outros meios de transporte, o crescimento destas vias exige a realização de novos estudos bem como o aprofundamento de outros já realizados, pois esta evolução está directamente relacionada com o surgimento de valores de cargas e de velocidades mais elevadas, colocando novos problemas técnicos.

A movimentação de comboios em linhas ferroviárias tradicionais, onde a velocidade de circulação deste transporte não excede os  $220km/h$  e a passagem de mercadoria mais pesada não é muito recorrente, pode criar diversas situações adversas neste tipo de vias, de acordo com o tipo de solo em que estão fundadas e de outras características da via, que se reflectirá na segurança da mesma e, naturalmente, dos passageiros que nela circulam.

Deste modo, é de extrema importância conhecer e compreender quais as possíveis consequências que a circulação sistemática de comboios pode causar, em determinadas condições, numa linha ferroviária. Neste âmbito, no presente trabalho avaliam-se os esforços transmitidos a diferentes características de vias, nomeadamente diferentes condições de fundação, cargas actantes e carris, através de cálculos efectuados para cargas estáticas e para cargas dinâmicas.

Salienta-se, também, o facto de que, por forma a acompanhar o crescimento de outros meios de transporte, se assiste ao longo destes últimos anos a um novo impulso no desenvolvi-

mento do transporte ferroviário, nomeadamente em Portugal, com a implementação de linhas de alta velocidade.

Assim, e para aproveitar as linhas convencionais já existentes, têm-se elaborado diversos estudos por forma a adaptar estas linhas às mais modernas, diminuindo, conseqüentemente, os elevados custos resultantes da construção de novas vias. No entanto, um dos principais problemas que se verificam para estes casos, consiste na adaptação das vias convencionais ao aumento da velocidade de circulação de comboios, de acordo com as velocidades admissíveis para estas novas vias.

É correcto afirmar então, que desde o aparecimento das primeiras vias ferroviárias até ao presente, o estudo de esforços provocados pela circulação de comboios é um tema muito actual e que está em constante desenvolvimento.

É de referir, também, que a possibilidade de aprendizagem de um programa computacional numérico, nomeadamente o Matlab, foi uma motivação importante para a escolha do presente tema, pois esta será uma ferramenta muito útil em diversos trabalhos que possa vir a efectuar ao longo da minha vida profissional.

## 1.2 Objectivos

A presente dissertação teve como objectivo principal simular, através do modelo de Winkler, uma via ferroviária e, deste modo, determinar os esforços transmitidos às distintas vias, variando estas as suas características no tipo de solo de fundação, no tipo de carril e mesmo no valor da carga de roda aplicada.

Assim, estes esforços foram calculados através de duas abordagens de cálculo distintas, a solução analítica, considerada exacta, e a solução numérica, aproximada. No entanto, e tal como se referiu inicialmente, ambas foram baseadas no modelo matemático criado, por Emil Winkler, com o principal objectivo de estudar os esforços em vias ferroviárias.

A realização do procedimento descrito anteriormente, permitiu, também, que se efectuasse uma comparação entre os resultados obtidos por ambos os métodos e, de acordo com estes, confirmar que o modelo numérico é uma alternativa ao cálculo analítico.

É de salientar, também, a análise realizada através da solução numérica para uma via ferroviária fundada em diferentes condições de fundação e sujeita a acção de uma carga de roda dinâmica.

O principal objectivo deste estudo, consistiu na determinação de esforços numa via com as características indicadas anteriormente, ou seja, assente sobre diferentes condições de fundação. Desta forma, e de modo a não ocorrer uma variação brusca na rigidez da fundação, analisou-se a influência que um comprimento de transição, localizado entre dois solos com características bem distintas, apresenta no comportamento geral da via. Estudou-se para esta área diferentes soluções adoptadas, nomeadamente uma solução de aumento gradual de

rigidez ou uma solução de transição de rigidez constante, bem como diferentes comprimentos de transição.

## 1.3 Estrutura da dissertação

Os temas abordados no presente trabalho, cada um com objectivos distintos uns dos outros, foram organizados e apresentados em cinco capítulos.

Neste primeiro Capítulo realizou-se, em primeiro lugar, um enquadramento genérico do tema e descreveram-se quais os principais objectivos deste trabalho. De acordo com isto, apresenta-se a estrutura do mesmo.

Efectuou-se, também, uma introdução ao tema através de uma breve explicação das principais funções dos elementos constituintes de uma via ferroviária.

No entanto, sendo a principal finalidade desta dissertação a determinação de esforços transmitidos às vias, iniciou-se, no Capítulo 2, por modelar o sistema ferroviário que permite a obtenção dos referidos esforços, através da caracterização do modelo de cálculo utilizado, especificamente o modelo de Winkler, bem como a explicação de alguns parâmetros caracterizadores do mesmo ou, no presente caso, da via ferroviária.

Deste modo, definiram-se também neste Capítulo os valores utilizados que caracterizam o modelo e que, conseqüentemente, possibilitam a determinação dos objectivos propostos neste trabalho, entre os quais se destacam a carga de roda que actua sobre a via, os diferentes tipos de carris, relacionados com a rigidez de flexão da viga, e a resistência vertical da via, este relacionado com o tipo de solo de fundação.

Conforme foi referido na secção 1.2, os esforços transmitidos às vias ferroviárias foram calculados através de duas abordagens distintas, a solução analítica, considerada exacta, e a solução numérica, aproximada.

Assim, nos Capítulos 3 e 4 exibem-se os principais resultados obtidos nesta dissertação através destas duas metodologias de cálculo.

O primeiro apresenta todos os resultados determinados para um problema estático, ou seja, para os cálculos efectuados em que a carga de roda apresenta velocidade nula. Desta forma, e em relação à solução analítica, determinaram-se os deslocamentos provocados por uma carga concentrada e por um comboio de cargas aplicadas numa via com rigidez de fundação constante. Realizou-se, também, para a mesma metodologia um breve estudo teórico sobre a solução que permite obter o valor do deslocamento para o caso de uma carga concentrada aplicada numa via com rigidez de fundação variável.

Em relação aos resultados determinados através do modelo de cálculo numérico, apresentam-se as mesmas soluções referidas anteriormente para a solução analítica. No entanto, para além destes, determinaram-se também as forças transmitidas às travessas e a influência que o espaçamento destes elementos pode apresentar.

Através da realização deste Capítulo, foi possível efectuar uma comparação entre os resultados obtidos através destes dois métodos de cálculo, ou seja, entre a solução analítica e a solução numérica.

O Capítulo 4 exhibe, novamente para ambos os métodos de cálculo, os resultados determinados para uma carga a circular com determinada velocidade, ou seja, para um problema dinâmico. Para a primeira metodologia, solução analítica, apresentam-se as soluções referentes a uma carga concentrada aplicada numa via com rigidez de fundação constante, enquanto para a segunda metodologia, a solução numérica, estudou-se a influência do comprimento de transição de um solo com características medianas, colocada entre dois solos com rigidez de fundação muito diferentes, bem como a influência positiva que uma situação de aumento gradual de rigidez tem no comportamento global de uma via.

Para além disto, com a realização deste estudo determinaram-se, também, as forças exercidas por cada travessa e os deslocamentos de cada uma delas devido à circulação da carga com determinada velocidade.

Por fim, no Capítulo 5 apresentam-se as principais considerações resultantes da realização deste trabalho.

## 1.4 Elementos constituintes de uma via ferroviária

Resumidamente, uma via ferroviária pode ser definida como parte de um sistema de transporte destinado a permitir a circulação de comboios que são conduzidos sobre carris. Estas vias são constituídas por dois carris colocados paralelamente entre si, geralmente fabricados em aço, dispostos de forma perpendicular sobre as travessas, que tanto podem ser de madeira, aço ou betão, assentes em fundações próprias, nomeadamente um balastro ou uma laje. As rodas dos comboios encaixam-se nos carris que, por sua vez, são mantidos a uma determinada distância constante, designada por bitola.

A Figura 1.1 apresenta um corte esquemático onde alguns destes elementos são representados.

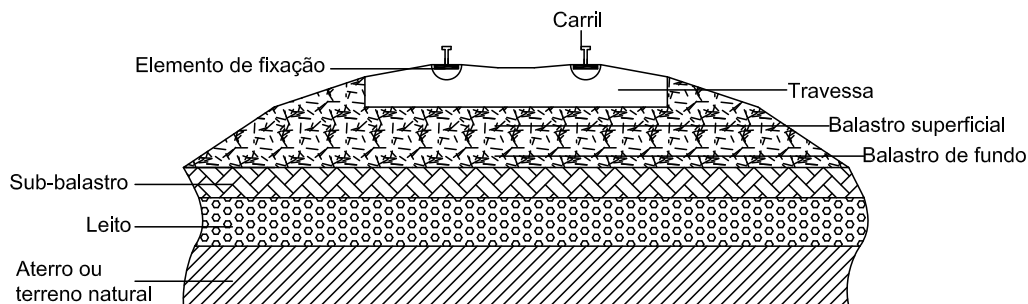


Figura 1.1: Corte transversal de uma linha ferroviária balastrada

Uma via balastrada, assim definida para os casos em que a fundação da via é o balastro,



é composta por dois sub-sistemas, a superestrutura e a infraestrutura. O primeiro apresenta uma enorme importância para todo o sistema ferroviário, pois os seus elementos constituintes estão em contacto permanente com o material circulante do comboio e, consequentemente, transmitem para a infraestrutura as cargas a que vão estar sujeitas ao longo de toda a sua vida útil.

Em relação ao segundo grupo, e tal como foi anteriormente referido, este é a componente da via ferroviária que recebe os esforços vindos da superestrutura. Deste modo, a principal função da infraestrutura é a de impedir deformações excessivas, ou seja, deformações que impeçam o bom funcionamento da via. É, também, um local onde têm origem muitos defeitos prejudiciais para o correcto funcionamento da via, nomeadamente defeitos resultantes de fundações inadequadas.

Os elementos que constituem a superestrutura são carris, sistemas de fixação, travessas e balastro. Por sua vez, a infraestrutura é constituída apenas pelo solo de fundação onde os elementos do primeiro grupo assentam, ou seja, o sub-balastro, o leito da via e a plataforma natural de terreno.

Seguidamente, descrevem-se as principais funções dos elementos constituintes de uma via ferroviária.

#### 1.4.1 Carril

O carril é o elemento da superestrutura que apresenta maior importância, pois está em contacto directo com a superfície de rolamento dos comboios aquando da sua passagem. Assim, é o primeiro a receber as cargas transmitidas à via sendo, deste modo, o grande responsável pela transferência da mesma para os restantes componentes.

Para além de conduzir o veículo, tem como principais funções suportar, reduzir e transmitir os esforços para os restantes elementos subjacentes da via. No entanto, para possuir capacidade de realizar estas funcionalidades, a sua fabricação deve ser cuidadosamente estudada do ponto de vista da segurança.

Em comparação com os perfis antigos, os modelos actuais mais utilizados apresentam uma secção maior e um maior peso pelo que, aumentam a sua capacidade de suporte a cargas mais elevadas por eixo.

A Figura 1.2 exhibe o modelo de carril utilizado preferencialmente na maioria das vias ferroviárias. Este foi criado e desenvolvido por Vignole.

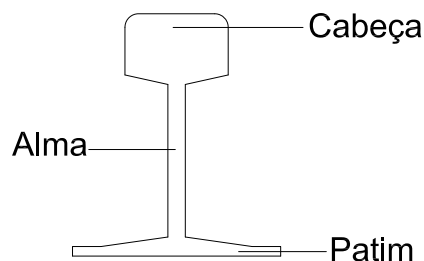


Figura 1.2: Perfil de carril criado por Vignole

Conforme ilustrado na Figura 1.2, este é constituído por três partes distintas: a cabeça, a alma e o patim.

A primeira corresponde à parte superior do carril onde as rodas dos comboios se apoiam e através da qual são conduzidas. Deve ser suficientemente resistente para que o desgaste provocado pela passagem do material circulante não afecte o momento de inércia da secção.

A alma, parte intermédia do carril, tem como principais funções garantir uma altura suficiente para resistir à flexão e uma espessura mínima para que a resistência e a rigidez transversal apresentem valores credíveis.

Finalmente, o patim, assim designado para a parte inferior do carril, assenta nas travessas. Deste modo, a sua função básica é assegurar que a alma permaneça na vertical, perpendicularmente a estes elementos. Caso a sua espessura não seja a mais adequada pode provocar deformações permanentes na via.

### 1.4.2 Sistema de fixação

O sistema de fixação assegura o correcto posicionamento do carril e a amarração do mesmo sobre a travessa. Absorve, também, parte de algumas vibrações provocadas pela passagem de um comboio.

As características elásticas destes elementos devem permanecer estáveis durante o período de vida útil de uma via ferroviária.

### 1.4.3 Travessas

As travessas localizam-se ao longo da parte inferior do carril, sendo que o seu espaçamento varia, de acordo com as características da via, entre os  $0.5m$  e os  $0.7m$ .

Apresentam como principal função a transmissão de cargas vindas dos carris para o balastro. No entanto, esta transmissão deve ser efectuada de uma forma mais uniforme possível, pois caso contrário podem provocar deformações excessivas na via.

Para além disto, constituem, em certa parte, uma base de suporte e de fixação do carril mantendo a distância entre estes elementos, designada inicialmente por bitola, constante.

Devem exhibir as seguintes particularidades:

1. Necessária rigidez e elasticidade;
2. Suficiente resistência aos esforços provenientes do carril;
3. Boa durabilidade;
4. Controlar os deslocamentos longitudinais e transversais;

De acordo com Teixeira (2009) e Esveld (2001), dependendo do tipo de solicitações a que vão estar sujeitas ao longo da sua vida útil, de factor económicos, entre outros, as travessas podem ser de madeira, metálicas ou betão.

#### 1.4.4 Balastro

O balastro é o elemento que suporta os restantes componentes definidos anteriormente, ou seja, o carril, bem como o seu respectivo sistema de fixação, e as travessas.

Esta camada, constituída unicamente por material granular, tem diversas funções consideradas importantes para um eficaz comportamento da via ferroviária. Entre as quais, destacam-se a distribuição dos esforços verticais, transmitidos pelas travessas a este elemento, de uma forma gradual e constante, pois conforme se referiu inicialmente, o balastro é a base dos elementos da superestrutura pelo que deve ser mantido na posição correcta. Deve, também, facilitar a drenagem da água que cai directamente sobre a via, contribuir para a flexibilidade e amortecimento da sua estrutura, absorver as vibrações mecânicas e sonoras, facilitar as tarefas de manutenção da qualidade geométrica da via e impedir movimentações quer laterais, quer longitudinais.

Em relação a granulometria do material constituinte desta camada, a sua forma geométrica e as suas dimensões são bastante importantes para o correcto desempenho deste elemento, nomeadamente no que diz respeito à drenagem de águas.

Deste modo, a solução mais utilizada e que apresenta melhores resultados é a pedra britada. Este material não deve ter uma forma laminar nem cúbica. Não deve, também, apresentar nem grandes dimensões nem muito pequenas, pois se for muito grande e de granulometria contínua, garante maiores resistências às solicitações de tráfego. No entanto, caso sejam de pequenas dimensões e com alguma descontinuidade, apesar de garantirem melhores condições de drenagem, provocam alguma perda de elasticidade, o que não é o mais indicado para uma eficaz absorção de energia e redução do amortecimento de vibrações.

#### 1.4.5 Sub-balastro

O sub-balastro, assim designado para a camada que se encontra na parte inferior do balastro, apresenta, também, diversas funções consideradas importantes.

Assim, realça-se o facto de evitar a penetração de partículas vindas do solo no balastro, ou seja, funciona como um filtro de separação entre estes dois elementos, absorve parte dos esforços provenientes do balastro e transmite-os para as camadas adjacentes, aumenta a capacidade de suporte da plataforma, apresenta boa capacidade de drenagem, torna a via mais flexível e, por último, aumenta a resistência do leito à erosão e à penetração de água.

Refere-se, ainda, que a utilização deste elemento atenua os custos económicos de uma determinada via, pois o sub-balastro é menos dispendioso que o balastro e a sua utilização reduz a espessura necessária deste último componente e, consequentemente, os custos finais de construção de uma linha ferroviária.

Após a descrição das várias funções dos elementos constituintes de uma via, é ponto comum, em todas elas, que o principal objectivo deste conjunto consiste em transferir, de

uma forma gradual, as cargas produzidas pela circulação de comboios até à plataforma de terreno natural.

No entanto, esta transferência de cargas tem por base a redução de tensões, camada a camada, até atingir o solo de fundação. Assim, quando aqui chegar, os esforços produzidos não são tão elevados nos terrenos adjacentes de uma determinada via como os que ocorrem na superestrutura ferroviária.

## Capítulo 2

# Modelação do sistema

O principal objectivo deste Capítulo consiste, principalmente, na definição do modelo de cálculo utilizado nas diversas secções presentes neste trabalho, permitindo, desta forma, simular situações reais em determinadas vias ferroviárias e, assim, obter os esforços existentes na mesma.

Deste modo, para determinação dos referidos esforços, a modelação da via ferroviária foi realizada através do modelo de Winkler.

Para além disto, caracterizaram-se também os parâmetros que definem o referido modelo de cálculo, entre os quais se destacam o tipo de carril utilizado, o valor da carga de roda actuante, a rigidez vertical da via e o amortecimento da mesma.

### 2.1 Formulação do problema

O modelo de Winkler é um modelo matemático criado e desenvolvido por um engenheiro civil alemão, Emil Winkler, em 1867, com o objectivo de estudar as fundações de vias ferroviárias. É uma solução aproximada que surgiu com a necessidade prática de analisar o comportamento das vias. Deste modo, um carril pode ser modelado como uma viga cujo suporte, nomeadamente as travessas e o solo de fundação, deformam quando a carga está aplicada sobre a viga. Assim, esta pode ser estudada estando apoiada em molas elásticas discretas. No entanto, uma abordagem mais simples e suficientemente rigorosa, baseia-se na consideração de uma fundação contínua elástica. Tal abordagem, consiste num modelo analítico muito simples denominada por modelo de Winkler.

Neste modelo, a fundação da via, onde se inclui as travessas e o solo de fundação da estrutura ferroviária, é modelada através de molas que, por sua vez, se encontram ligadas a uma camada incompressível, como ilustra a Figura 2.1. Estas caracterizam a resistência vertical da via,  $k$ , e são totalmente independentes entre si, ou seja, a deformação que se verifica numa determinada mola não depende do que se verifica nas restantes pelo que, aquelas que se localizam fora da área carregada mantêm-se indeformadas.

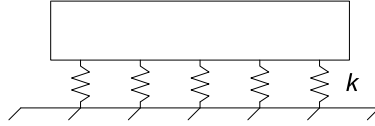


Figura 2.1: Modelo de Winkler - molas ligadas a uma camada incompressível

Uma importante característica desta formulação, é o facto da pressão de contacto entre a base da viga e o solo de fundação, num determinado ponto, ser directamente proporcional ao deslocamento elástico do solo nesse mesmo ponto. De acordo com Teixeira (2009), esta relação pode ser descrita através da expressão 2.1:

$$p' = C.w \quad (2.1)$$

Onde:

$p'$ , é a tensão transmitida ao solo,  $kN/m^2$ ;

$w$ , é o deslocamento vertical do carril,  $m$ ;

$C$ , é a constante de Winkler,  $kN/m^3$ .

No entanto, adoptando a teoria de Talbot (1918), a expressão 2.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$p = u.w \quad (2.2)$$

Sendo que para este caso,  $p$  corresponde à força de suporte por unidade de comprimento do carril ( $kN/m$ ) e  $u$  ao módulo da via ( $kN/m^2$ ).

A modelação de uma via ferroviária através do modelo de Winkler, exemplifica-se através de uma viga, designada por “*viga de Winkler*”, assente numa fundação elástica. Esta viga representa a superestrutura ferroviária (constituída pelos carris) e tem como características elásticas o módulo de elasticidade  $E$  e geométricas o momento de inércia  $I$ . Em relação à fundação, formada pelas travessas, balastro, sub-balastro, entre outros, a modelação fez-se, como já foi referido, através de molas que representam a resistência vertical da via.

A Figura 2.2, ilustra o que foi dito anteriormente:

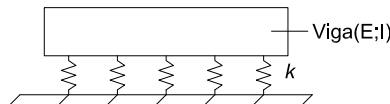


Figura 2.2: Modelo de cálculo utilizado

Considerando agora um carril infinitamente longo, de rigidez à flexão  $EI$ , suportado por uma fundação elástica de módulo de fundação  $k$  e carregado por uma carga  $Q$ , conforme

representado na Figura 2.3:

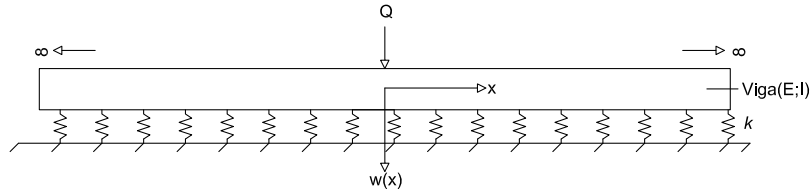


Figura 2.3: Viga infinita em fundação elástica

Onde:

$Q$ , é a carga de roda concentrada,

$EI$ , é a rigidez de flexão do carril,

$k$ , é a resistência vertical da via,

$w(x)$ , é o deslocamento vertical do carril.

Salienta-se o facto de que, quando  $x$  tende para  $\infty$ , as condições de fronteira existentes no modelo corresponderem ao deslocamento e rotação nulos, ou seja:

$$w(\pm\infty) = 0 \quad (2.3)$$

$$w'(\pm\infty) = 0 \quad (2.4)$$

Isto significa que, os efeitos provocados pela carga de roda  $Q$  aplicada na origem deixa de fazer-se sentir nestes pontos.

Estudando um segmento infinitesimal  $dx$  do carril representado na Figura 2.3, é possível escrever, respectivamente, a equação de equilíbrio de forças verticais, equação 2.5, e de momentos flectores, equação 2.6.

A Figura 2.4, apresenta os esforços actuantes nesta parcela de carril.

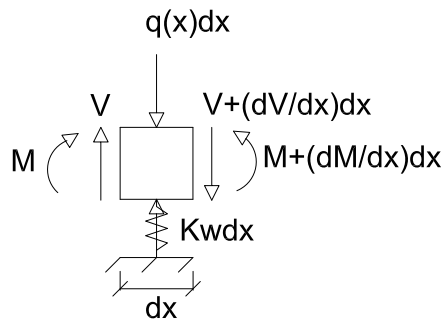


Figura 2.4: Esforços actuantes num segmento infinitesimal  $dx$  de um carril

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow q(x)dx + V + \frac{dV}{dx}dx - V - kwdx = 0 \Leftrightarrow q(x)dx + \frac{dV}{dx}dx = kwdx \quad (2.5)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M + \frac{dM}{dx}dx - M - Vdx = 0 \Leftrightarrow \frac{dM}{dx}dx = Vdx \quad (2.6)$$

Para definir o estado de uma viga em relação aos deslocamentos através da teoria das vigas, a relação momentos/curvatura é dada pela relação constitutiva 2.7:

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.7)$$

Esta, que é válida no domínio dos pequenos deslocamentos, traduz o comportamento elástico linear da viga.

Desta forma, das equações de equilíbrio 2.5 e 2.6 e da relação constitutiva 2.7, obteve-se a equação elástica da viga sujeita a um carregamento distribuído e apoiada em meio elástico de Winkler.

A equação diferencial que rege este comportamento, para uma rigidez de flexão  $EI$  variável, é:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + p = q(x) \quad (2.8)$$

Em que:

$q(x)$ , é a carga distribuída exercida pelas rodas.

Contudo, para este estudo a carga distribuída não irá ser considerada, visto que as cargas provocadas pelo veículo ferroviário podem ser representadas por cargas pontuais, especificamente as cargas de roda  $Q$ . Assim, a equação diferencial 2.9 define o modelo de Winkler para uma carga concentrada aplicada na origem e  $EI$  constante:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + p = Q\delta(x) \quad (2.9)$$

Verifica-se assim, que os únicos parâmetros necessários para determinar os esforços numa via ferroviária, para além do valor da carga aplicada, são a rigidez de flexão  $EI$  e a resistência vertical da via  $k$ .

Em Esveld (2001), são exibidas as soluções analíticas que definem o modelo em causa. Para o presente trabalho, estas soluções irão ser apresentadas ao longo dos Capítulos 3 e 4.



## 2.2 Resistência vertical da via

A resistência vertical da via pode ser caracterizada através de vários parâmetros, entre os quais se destacam a rigidez da via  $K$  e o módulo da via  $u$ , que simplificam o cálculo de esforços sobre a via ferroviária.

No presente trabalho foram apenas considerados estes dois parâmetros, pelo que, é importante compreender as principais diferenças existentes entre ambos.

Assim, o parâmetro de rigidez da via, traduzido pela expressão 2.10, corresponde, para uma análise estática, à relação existente entre a força aplicada à via e o assentamento provocado no ponto de aplicação da mesma, ou seja, o assentamento máximo.

$$K = \frac{Q}{w_{máx}} \quad (2.10)$$

Em que,  $Q$  corresponde à carga de roda aplicada ( $kN$ ) e  $w_{máx}$  ao máximo deslocamento ( $m$ ) provocado pela aplicação da carga, que para o caso estático corresponde ao ponto de aplicação da carga. Deste modo,  $K$  é definido em  $kN/m$ .

Já o módulo da via é definido como a carga uniformemente distribuída, aplicada sobre o carril, que produz um determinado assentamento. No entanto, como as cargas transmitidas à via através dos veículos ferroviários podem ser consideradas cargas pontuais aplicadas, é mais correcto definir o módulo da via como a força de apoio por unidade de comprimento e por unidade de deformação ( $kN/m^2$ ).

A principal diferença entre estes dois parâmetros consiste, essencialmente, nos componentes que cada um inclui na sua análise. Isto é, a rigidez da via inclui todos os componentes da via, nos quais se inclui o carril, ao passo que o módulo da via exclui a rigidez de flexão do mesmo elemento e, representa apenas a condição de apoio ferroviário, ou seja, a rigidez da placa de assento, da travessa, do balastro, da plataforma, entre outros.

Desta forma, e porque na modelação da via ferroviária o carril se encontra separado dos restantes elementos, como se demonstrou na secção 2.1, o parâmetro escolhido para determinação dos esforços pretendidos foi o módulo da via.

Segundo Teixeira (2003) e Priest e Powrie (2009), a expressão que traduz a relação entre a rigidez da via e o módulo da via é dada através da expressão 2.11:

$$u = \frac{(K)^{4/3}}{(64.EI)^{1/3}} \quad (2.11)$$

Reporta-se ainda o facto de o módulo da via ser um parâmetro indicador da qualidade da via.

## 2.3 Solo

No presente trabalho definiram-se três tipos de solos, nomeadamente um solo mole, um solo duro e um solo com características medianas. Através dos valores caracterizadores da rigidez vertical da via, obtidos experimentalmente por Birman (1966) e fornecidos em Pita (2001), após estudos efectuados em linhas ferroviárias em solo alemão, foi possível determinar e caracterizar o módulo da via para os três tipos de solo e, assim, quantificar a qualidade da via.

A Tabela 2.1, apresenta alguns valores para a rigidez vertical da via em diferentes tipos de solo, obtidos, como foi referido, experimentalmente por Birmann.

Tabela 2.1: Valores característicos da rigidez vertical da via,  $K$

Características do solo	$K$ [ $kN/m$ ]
Plataforma mole	5000 a 25000
Plataforma argilosa	15000 a 20000
Plataforma de cascalho	20000 a 60000
Plataforma de rocha	30000 a 40000
Balastro e plataforma rijos	80000 a 160000

Tabela 2.2: Definição de vários tipos de terrenos

Tipo de terreno	Descrição do perfil de terreno	$v_{s,30}$ [ $m/s$ ]	$N_{SPT}$
A	Material rochoso que inclui no máximo 5m de material mais fraco à superfície	$> 800$	—
B	Depósitos de areia muito compacta, de cascalho ou de argila muito rija, e de espessura muito grande	$360 < v_{s,30} < 800$	$> 50$
C	Depósitos profundos de areia compacta ou medianamente compacta, de cascalho ou areia rija, espessura grande	$180 < v_{s,30} < 360$	$15 - 50$
D	Depósitos de solos não coesivos de capacidade média ou baixa	$< 180$	$< 15$

Tendo em consideração as Tabelas 2.1 e 2.2, onde se definem vários tipos de terrenos de acordo com LNEC (2009) através de ensaios  $N_{SPT}$  realizados e do valor médio da velocidade de propagação de ondas  $S$ , ondas de corte, nos 30m superiores do perfil de solo para deformações por corte iguais ou inferiores a  $10^{-5}$ , quantificou-se o módulo da via para os três tipos de solos

utilizados nos cálculos efectuados.

Deste modo, após visualização das Tabelas 2.1 e 2.2, definiu-se o terreno tipo *A* como um solo rijo com rigidez vertical da via de  $80000kN/m$ , correspondente a um balastro e plataforma rijos, e o terreno tipo *D* para um solo mole com rigidez vertical  $K$  de  $10000kN/m$ , característico de uma plataforma mole. Em relação a um solo com características medianas, o seu valor foi fixado num valor intermédio entre estes dois.

Uma vez definida a rigidez vertical da via para ambos os tipos de solo, obteve-se, através da expressão 2.11, o valor do módulo da via.

A Tabela 2.3, apresenta os valores definidos para cada tipo de solo.

Tabela 2.3: Valores determinados para caracterização do módulo da via,  $u$

<b>Tipo de solo</b>	<b>Rigidez vertical da via, <math>K[kN/m]</math></b>	<b>Módulo da via, <math>u[kN/m^2]</math></b>
Rijo	80000	50000
Médio	50000	25000
Mole	10000	3000

Apesar deste cálculo depender do tipo de carril em utilização, conforme mostra a expressão 2.11, a diferença entre os valores obtidos tanto para o carril *UIC* – 54 como para o carril *UIC* – 60 é muito reduzida pelo que, os valores apresentados na Tabela 2.3 estão definidos para qualquer tipo de carril.

Em Esveld (2001) apresenta-se a classificação de solos efectuada pela *International Union of Railways (UIC)*<sup>1</sup>, Tabela 2.4, para os diferentes tipos de solo em que as vias ferroviárias estão fundadas. De acordo com esta classificação, aos diferentes solos caracterizados para este trabalho, Tabela 2.3, foram, também, atribuídos a respectiva classe de qualidade de solos. Estes são classificados da seguinte forma: *QS0* é definido para um solo impróprio; *QS1* corresponde a um solo de má qualidade, embora se aceite que se construa uma via ferroviária assente neste tipo de solo; *QS2* equivale a um solo de qualidade mediana; e *QS3* corresponde a um solo de boa qualidade.

No caso do solo ser classificado de *QS0*, uma determinada espessura de solo terá de ser substituída para que seja possível realizar uma plataforma adequada.

Deste modo, tendo em consideração os valores apresentados nas Tabelas 2.3 e 2.4, o solo considerado rijo é de classe *QS3*, o solo mole de classe *QS1* e, por último, o solo com características médias de classe *QS2*.

<sup>1</sup>UIC é uma organização mundial que tem como principal objectivo promover o desenvolvimento sustentável do transporte ferroviário.

Tabela 2.4: Classificação da qualidade de solos de acordo com *International Union of Railways*

Classificação dos solos (Identificação geotécnica)	Classe de Qualidade dos solos
Solos orgânicos; Solos finos ( mais de 15% de finos <sup>1</sup> húmidos e não compatíveis); Solos isotrópicos; Materiais solúveis; Materiais decompostos; Solos mistos “minero-orgânicos” <sup>2</sup>	QS0
Solos com mais de 40% de finos; Rochas muito evolutivas, como por exemplo xistos deteriorados ou margas	QS1
Solos com percentagem de finos entre os 15% e 40%; Rochas evolutivas, como por exemplo xistos não deteriorados; Rochas brandas	QS1 <sup>3</sup>
Solos com 5 a 15% de finos <sup>1</sup> ; Solos com menos de 5% de finos <sup>1</sup> mas uniformes	QS2 <sup>4</sup>
Solos com menos de 5% de finos <sup>1</sup> ; Rochas duras	QS3

<sup>1</sup>As análises granulométricas efectuaram-se na peneira de 60mm;

<sup>2</sup>Este solo poderia ser classificado como QS1;

<sup>3</sup>Este solo poderia ser de classe de qualidade QS2, caso se confirme que as condições hidrológicas e hidrogeológicas são boas;

<sup>4</sup>Este solo poderia ser de classe de qualidade QS3, caso se confirme que as condições hidrológicas e hidrogeológicas são boas;

Sendo a dissertação um trabalho puramente académico, assume-se que os dados aqui presentes são claramente aceites.

## 2.4 Acções

Tal como se demonstrou na secção 2.1, para determinar os esforços numa via ferroviária, através do modelo de Winkler, é apenas necessário definir valores para três incógnitas: a carga de roda  $Q$  aplicada; a rigidez de flexão da viga, que depende do tipo de carril utilizado; e a rigidez vertical da via, este relacionado com o tipo de solo de fundação.

Como este último parâmetro já foi definido na secção anterior, nesta serão estabelecidos os valores utilizados para as restantes duas incógnitas, ou seja, o valor da carga de roda e o tipo de carril a utilizar.

Mais uma vez, assume-se que estes serão claramente admitidos para efeito do presente trabalho.

### 2.4.1 Carga de roda $Q$

As linhas ferroviárias são classificadas de acordo com as cargas a que vão estar sujeitas ao longo da sua vida útil. Deste modo, é fácil perceber que existem vários tipos de vias. Esta

distinção foi realizada pela *International Union of Railways* e estabelece, como já foi referido, as diferentes categorias de via de acordo com os diferentes tipos de cargas aplicadas, nomeadamente as cargas por eixo e o peso distribuído por metro de comprimento.

A Tabela 2.5, apresenta as diferentes categorias de vias ferroviárias existentes, de acordo com Esveld (2001), conforme com o que foi anteriormente explicado.

Tabela 2.5: Categorias de vias ferroviárias

Categoria	Carga por eixo [kN]	Carga de roda [kN]	Peso/m [kN/m]
A	160	80	48
B1	180	90	50
B2	180	90	64
C2	200	100	64
C3	200	100	72
C4	200	100	80
D4	225	112.5	80

Conforme se visualiza foram definidas sete categorias de via pela *International Union of Railways*. Isto deve-se, principalmente, ao facto de uma categoria de via poder apresentar mais que um valor para o peso distribuído por metro de comprimento, como acontece para as categorias *B* e *C* apresentadas na Tabela.

Sendo as cargas transmitidas pelos veículos ferroviários cargas pontuais, os valores presentes na Tabela 2.5 que têm particular relevo para o presente trabalho são os referentes às cargas de roda. Os valores exibidos nesta coluna correspondem a metade dos valores apresentados para a carga de eixo pois, cada eixo é constituído por duas rodas.

$$Q = \frac{1}{2} \text{Carga por eixo} \quad (2.12)$$

Deste modo, é possível diferenciar as diferentes vias ferroviárias em quatro categorias, respectivamente a categoria *A*, correspondente a uma carga  $Q$  de  $80kN$ ; Categoria *B1*, para uma carga de  $90kN$ ; Categoria *C2*, para uma carga de  $100kN$ ; e Categoria *D4*, para  $Q = 112.5kN$ .

No entanto, os resultados que se apresentam ao longo deste trabalho serão referentes, apenas, para as vias de categoria *A*, *C2* e *D4*, ou seja, para cargas de roda de  $80kN$ ,  $100kN$  e  $112.5kN$ .

### 2.4.2 Carril

Para modelar o carril através do modelo de Winkler, como já se observou na secção 2.1, é apenas necessário considerar as características elásticas e geométricas da viga, ou seja, o

módulo de elasticidade e o momento de inércia, respectivamente.

Em relação ao valor do módulo de elasticidade utilizado para simular o carril, foi escolhido o módulo de elasticidade característico do aço, ou seja,  $210GPa$ . Já relativamente ao valor do momento de inércia, esta grandeza depende do tipo de carril escolhido para a via ferroviária. Assim, neste trabalho consideraram-se dois tipos de carris, classificados, mais uma vez, através da *International Union of Railways*: o carril *UIC* – 54 com um momento de inércia de  $2346cm^4$ , e o carril *UIC* – 60 com momento de inércia de  $3055cm^4$ , conforme Teixeira (2009) apresenta.

Deste modo, através dos valores definidos para o módulo de elasticidade e para o momento de inércia, facilmente se determinou os valores da rigidez à flexão da viga qualquer que seja o carril em utilização. A Tabela 2.6, apresenta os resultados obtidos:

Tabela 2.6: Rigidez à flexão dos carris *UIC* – 54 e *UIC* – 60

<b>Carril</b>	<b><math>EI[kN.m^2]</math></b>
<i>UIC</i> –54	4926.6
<i>UIC</i> –60	6415.5

## 2.5 Amortecimento

Os dados considerados para o amortecimento da via bem como a explicação do processo que possibilita a determinação desta matriz, é cuidadosamente desenvolvida na secção 4.2 do Capítulo 4.

## Capítulo 3

# Problema estático

### 3.1 Solução analítica

Os modelos de cálculo analítico, de solução exacta, estão por vezes limitados a múltiplas simplificações necessárias a efectuar por forma a estabelecer um conjunto de equações que forneçam as soluções pretendidas. São, apesar disto, muito úteis pois possibilitam a compreensão do fenómeno em estudo e, através de algumas análises simples, permitem também o aperfeiçoamento ou a verificação de modelos mais complexos, como são o caso dos modelos numéricos.

O modelo de cálculo elegido para obtenção dos resultados aqui apresentados e, também, o que é utilizado mais frequentemente, consiste numa viga, “*viga de Winkler*”, assente sobre uma fundação elástica. Tal como foi referido no Capítulo 2, neste modelo o carril é caracterizado por uma viga com determinadas características elásticas e geométricas, representadas, respectivamente, por um módulo de elasticidade  $E$  e momento de inércia  $I$ , sendo a fundação modelada por um conjunto de molas. Por vezes, a estas molas são adicionados amortecedores de viscosidade  $c$ . No entanto, e tal como a Figura 2.3 apresenta, estes elementos não foram considerados.

Assim, facilmente se percebe que os esforços podem ser calculados desde que se caracterizem os valores referentes à rigidez de flexão da viga e à rigidez do solo de fundação.

Deste modo, ao longo deste Capítulo serão apresentados alguns resultados obtidos através das soluções analíticas do modelo de Winkler, cuja equação diferencial se apresentou na secção 2.1, nomeadamente através da expressão 2.9.

#### 3.1.1 Carga concentrada sem variação de rigidez

Após Winkler ter determinado as soluções para o caso de cargas concentradas equidistantes, Schwedler, em 1882, e Zimmermann, em 1888, divulgaram as soluções que permitem determinar a deformação  $w(x)$  e o momento flector  $M(x)$  para o caso de uma carga estática concentrada aplicada na origem do referencial, ou seja, em  $x = 0m$ , sem variação de rigidez da fundação.

De acordo com Esveld (2001), as expressões 3.1 e 3.2 permitem, respectivamente, determinar os deslocamentos verticais do carril e os momentos flectores do mesmo.

$$w(x) = -\frac{Q}{2.u} \cdot \frac{1}{L} \cdot \eta(x) \quad (3.1)$$

$$M(x) = -\frac{Q}{4} \cdot L \cdot \mu(x) \quad (3.2)$$

Em que:

$$\eta(x) = e^{-\frac{|x|}{L}} \cdot \left[ \cos \frac{|x|}{L} + \sin \frac{|x|}{L} \right] \quad (3.3)$$

$$\mu(x) = e^{-\frac{|x|}{L}} \cdot \left[ \cos \frac{|x|}{L} - \sin \frac{|x|}{L} \right] \quad (3.4)$$

Importa salientar que o parâmetro  $L$ , definido através da expressão 3.5, é designado por comprimento característico ou comprimento elástico do sistema solo/viga.

Conforme a expressão demonstra, é apenas necessário considerar a rigidez de flexão da viga e o módulo da via para obtenção deste parâmetro.

$$L = \sqrt[4]{\frac{4.EI}{u}} \quad (3.5)$$

No entanto, em detrimento da utilização do comprimento elástico do sistema solo/viga, é usual que as expressões finais que permitem calcular os esforços actuantes utilizem um outro parâmetro, designado por factor ondulatório,  $\beta$ . Este, traduz a rigidez relativa entre a viga e o terreno de fundação e é expresso através da expressão 3.6.

$$\beta = \frac{1}{L} = \sqrt[4]{\frac{u}{4.EI}} \quad (3.6)$$

É, assim, possível determinar os valores de deformação e de momento flector para uma viga infinita com rigidez de fundação constante ao longo de todo o seu comprimento.

Outro objectivo também realizado nesta secção, consistiu na determinação do valor de  $x$  para o qual os deslocamentos são menores que um determinado valor de  $\varepsilon$  estabelecido inicialmente. Assim, através das expressões 3.1 e 3.6, e resolvendo a parcela trigonométrica  $\eta(x)$ , determinou-se a solução da inequação 3.7.

$$\frac{Q \cdot \beta}{2.u} \cdot e^{-\beta x} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\beta x - \pi/4) < \varepsilon \quad (3.7)$$



Obtendo-se o resultado apresentado em 3.8.

$$x > -\frac{1}{\beta} \cdot \ln \left( \frac{\varepsilon \cdot 2 \cdot u}{\beta \cdot \sqrt{2} \cdot Q} \right) \quad (3.8)$$

A expressão 3.8 permite, deste modo, determinar através do valor da carga actuante, do módulo da via e da rigidez de flexão do carril, o valor de  $x$  a partir do qual as deformações obtidas são menores que um valor de  $\varepsilon$  previamente definido.

De uma forma simples, como é o caso da aplicação desta expressão, é fácil de verificar e compreender qual o comprimento de influência, ou seja, o comprimento onde se verificam deformações relevantes, que uma determinada carga de roda aplicada na via produz.

### Apresentação de resultados

Os resultados apresentados nesta sub-secção foram obtidos através da utilização do modelo de cálculo ilustrado na Figura 3.1 e das expressões visualizadas anteriormente.

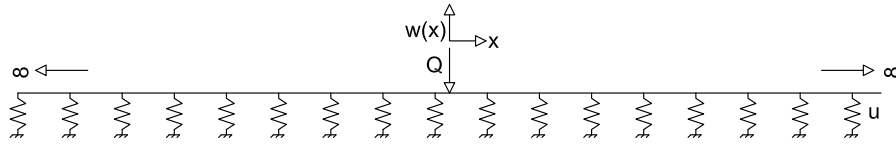


Figura 3.1: Representação do modelo de cálculo

Para uma melhor organização dos resultados aqui presentes, definiram-se nesta sub-secção dois casos de estudo. O primeiro é referente a um solo denominado rijo enquanto o segundo é alusivo a um solo mole, cujas características de rigidez podem ser consultadas na Tabela 2.3.

Para cada um destes casos, apresentam-se duas situações distintas de vias ferroviárias. Numa primeira fase, as vias estão sujeitas à acção da mesma carga de roda  $Q$  aplicadas em diferentes tipos de carris e, numa segunda e última fase, as vias são constituídas pelo mesmo tipo de carril mas diferentes cargas de roda estão aplicadas.

Por fim, no final de cada caso de estudo apresentam-se, numa Tabela, os resultados exactos dos deslocamentos obtidos na origem do referencial, em  $x = 0m$ , para as diversas situações estudadas.

De referir que, todos os resultados apresentados ao longo desta secção foram obtidos através de programação efectuada em *Matlab* elaborada pelo autor do presente trabalho. Ao longo da realização destes programas automáticos, que permitiram determinar as soluções exactas, recorreu-se, por vezes, ao auxílio de Dukkupati (2010).

### Primeiro caso de estudo

Seguidamente, encontram-se presentes nas Figuras 3.2 e 3.3, bem como na Tabela 3.1, os resultados obtidos, através da utilização da expressão 3.1, para uma via ferroviária fundada

em solo rijo ou, de acordo com a classificação elaborada pela *International Union of Railways*, para um solo de classe *QS3*.

A Figura 3.2, refere-se ao caso em que a mesma carga de roda, de  $80kN$ , está aplicada nos diferentes tipos de carris apresentados na sub-seção 2.4.2, enquanto a Figura 3.3 é referente a uma via que apresenta diferentes cargas de roda,  $80kN$  e  $100kN$ , a actuar no mesmo tipo de carril, *UIC – 60*.

Por último, a Tabela 3.1 apresenta o valor dos deslocamentos obtidos em  $x = 0m$  para os restantes casos práticos realizados para um solo rijo.

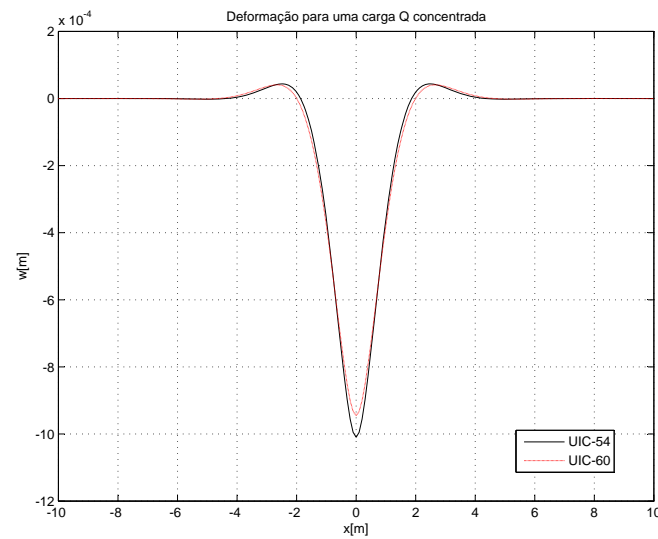


Figura 3.2: Vias ferroviárias fundadas em solo rijo, sujeitas a uma carga de  $80kN$  aplicadas em diferentes tipos de carris

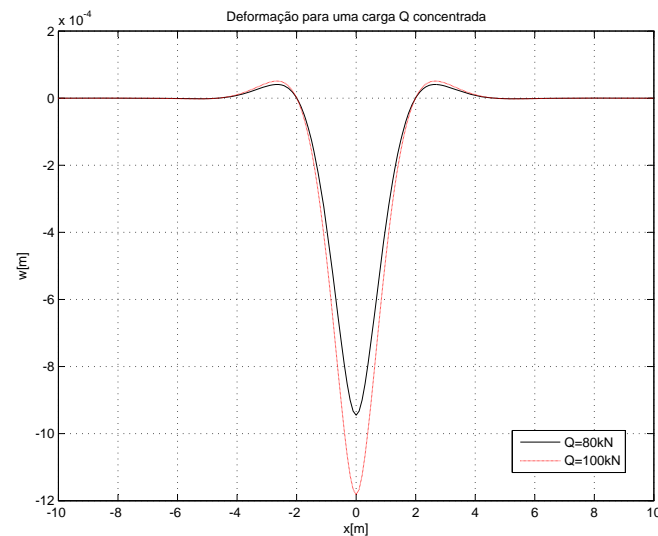


Figura 3.3: Vias ferroviárias fundadas em solo rijo, constituídas por um carril *UIC – 60*, sujeitas a diferentes cargas de roda

Conforme se pode verificar através de uma análise efectuada à Tabela 3.1, é possível

Tabela 3.1: Deslocamentos em solos rijos

Características da via ferroviária	Deslocamentos $[m]$ em $x = 0$
$Q = 80kN$ ; $UIC - 54$ ; Solo rijo	$-0.00101$
$Q = 80kN$ ; $UIC - 60$ ; Solo rijo	$-0.00094$
$Q = 100kN$ ; $UIC - 54$ ; Solo rijo	$-0.00126$
$Q = 100kN$ ; $UIC - 60$ ; Solo rijo	$-0.00118$
$Q = 112.5kN$ ; $UIC - 54$ ; Solo rijo	$-0.00142$
$Q = 112.5kN$ ; $UIC - 60$ ; Solo rijo	$-0.00133$

concluir que, quando se comparam vias com a mesma carga aplicada mas constituídas por diferentes carris, os deslocamentos são superiores para um carril  $UIC - 54$ , Figura 3.2. Em vias constituídas por carris do mesmo tipo mas sujeitas a diferentes cargas de roda, os deslocamentos são superiores quanto maior o valor da carga aplicada, Figura 3.3, como já era de esperar.

### Segundo caso de estudo

Para o segundo caso de estudo, referente a solos com características moles, ou seja, de classe  $QS1$ , as Figuras 3.4 e 3.5 exibem, respectivamente, os resultados obtidos para vias ferroviárias sujeitas à acção da mesma carga de roda,  $80kN$ , aplicadas em diferentes tipos de carris e, para vias constituídas por um carril  $UIC - 54$  sujeitas a cargas de roda de  $100kN$  e de  $112.5kN$ .

Finalmente, a Tabela 3.2 apresenta o valor dos deslocamentos obtidos em  $x = 0m$  para os restantes casos estudados.

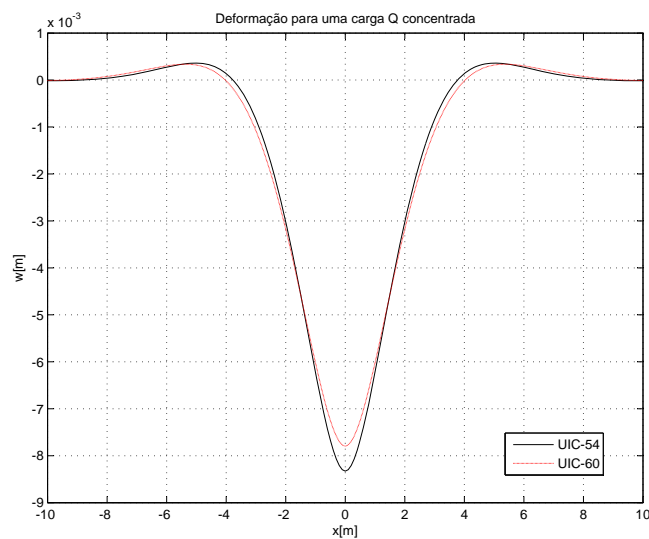


Figura 3.4: Vias ferroviárias fundadas em solo mole, sujeitas a uma carga de  $80kN$ , aplicadas a diferentes tipos de carris

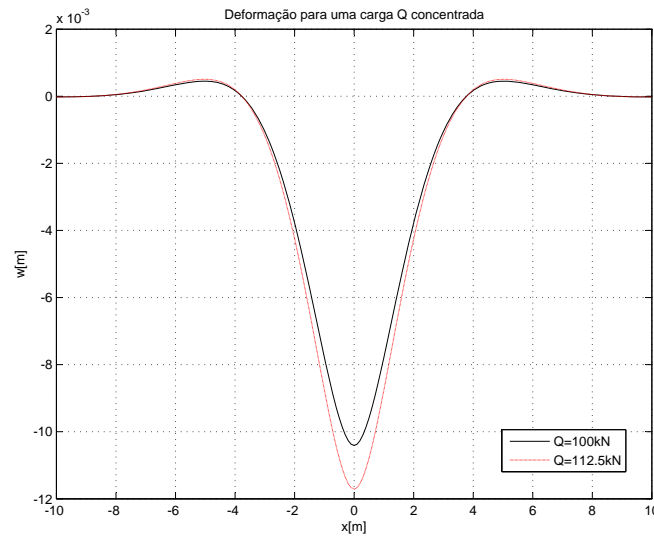


Figura 3.5: Vias ferroviárias fundadas em solo mole, constituídas por um carril *UIC* – 54, sujeitas a diferentes cargas de roda

Tabela 3.2: Deformações em solos moles

Características da via ferroviária	Deslocamentos $[m]$ em $x = 0$
$Q = 80kN$ ; <i>UIC</i> – 54; Solo mole	–0.00832
$Q = 80kN$ ; <i>UIC</i> – 60; Solo mole	–0.00779
$Q = 100kN$ ; <i>UIC</i> – 54; Solo mole	–0.01041
$Q = 100kN$ ; <i>UIC</i> – 60; Solo mole	–0.00974
$Q = 112.5kN$ ; <i>UIC</i> – 54; Solo mole	–0.01171
$Q = 112.5kN$ ; <i>UIC</i> – 60; Solo mole	–0.01096

As mesmas conclusões que se retiraram para o primeiro caso de estudo, referente a um solo rijo, podem agora ser novamente verificadas para a presente situação, em que a via está fundada num solo de características moles. Assim, volta-se a analisar que os deslocamentos são superiores para um carril do tipo *UIC* – 54, qualquer que seja o valor da carga  $Q$  aplicada, Figura 3.4, e que quanto maior for o valor dessa carga maior o valor do deslocamento, Figura 3.5.

### Comparação entre os diferentes casos de estudo

Para concluir o estudo de uma carga estática aplicada sobre uma via sem variação de rigidez de fundação, analisou-se nesta sub-secção situações em que se comparam vias ferroviárias constituídas pela mesma carga de roda e o mesmo tipo de carril, mas fundadas em diferentes solos de fundação.

A Figura 3.6, apresenta as soluções obtidas para uma carga de  $80kN$  aplicada num carril *UIC* – 54 fundado nos diferentes tipos de solos até aqui estudados, ou seja, solos rijos e moles.

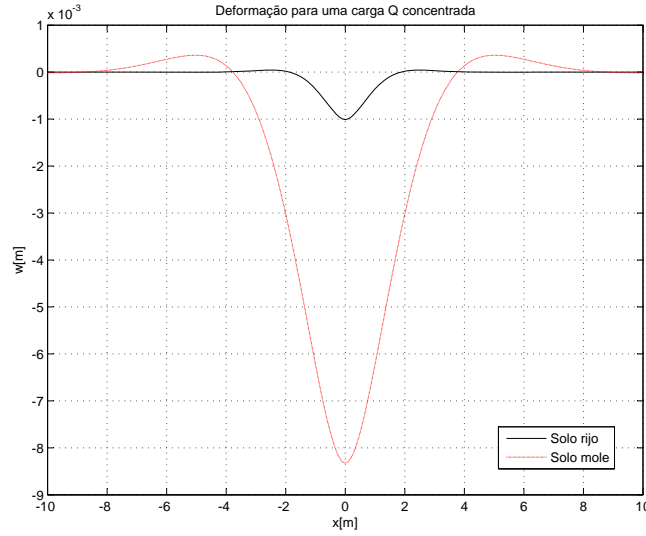


Figura 3.6: Vias ferroviárias fundadas em diferentes tipos de solos, sujeitas a uma carga de  $80kN$  aplicada num carril  $UIC - 54$

Tendo em atenção esta Figura e as Tabelas 3.1 e 3.2, apresentadas anteriormente, conclui-se que, qualquer que seja o valor da carga de roda aplicada bem como o tipo de carril em utilização, os deslocamentos em  $x = 0m$  são sempre superiores para um solo mole, conforme era esperado.

## Conclusões

Conforme se visualiza nos resultados exibidos anteriormente, tanto para o primeiro caso de estudo como para o segundo e mesmo para a situação em que se comparam os dois casos, é possível verificar que as conclusões são unânimes para ambas as situações. Deste modo, verificou-se que o valor dos deslocamentos no ponto de aplicação da carga de roda são sempre superiores para um solo com más características de fundação, como é o caso de um solo mole, para um carril do tipo  $UIC - 54$ , devido ao facto da rigidez à flexão ser menor, e quanto maior for o valor dessa mesma carga aplicada.

Em relação ao valor de  $x$  onde se proporcionam deslocamentos insignificantes, isto é, muito próximos de zero, é praticamente o mesmo para vias sujeitas à mesma carga de roda e fundadas no mesmo tipo de solo, qualquer que seja o tipo de carril em utilização, como demonstra, por exemplo, a Figura 3.2.

Finalmente, tanto para o carril  $UIC - 54$ , Figura 3.5, como para o carril  $UIC - 60$ , Figura 3.3, visualizou-se que os deslocamentos anulam-se, também, no mesmo valor de  $x$  quando se comparam vias ferroviárias fundadas no mesmo tipo de solo mas sujeitas a diferentes cargas de roda.

### 3.1.2 Carga concentrada com variação de rigidez

O principal objectivo com a realização da presente secção, consistiu na determinação e apresentação da solução analítica que permite obter o valor do deslocamento, no ponto de aplicação

de uma carga estática, para o caso em que a rigidez do solo de fundação é variável, conforme se visualiza na Figura 3.7. Esta Figura apresenta também o modelo de cálculo considerado.

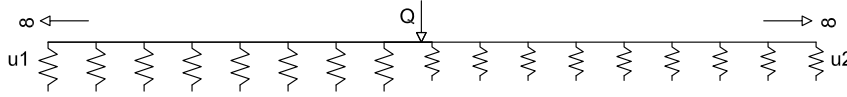


Figura 3.7: Modelo de cálculo apresentado para uma carga concentrada estática aplicada numa via com variação de rigidez da fundação

Conforme a Figura 3.7 demonstra, o comprimento do modelo em estudo é infinito. No entanto, e de acordo com Cook e Young (1999), o facto de existir uma alteração das características, ou da rigidez à flexão da viga ou, como é o caso, da rigidez do solo de fundação, obriga a que o problema em questão seja resolvido de uma outra forma que não a solução para o caso de uma viga infinita. Assim, para a correcta resolução deste problema, dividiu-se a viga, no ponto onde ocorrem estas significativas mudanças, em duas partes distintas e, deste modo, resolveu-se cada uma destas fracções como se tratasse de uma viga semi-infinita.

Para determinar a expressão que possibilita o cálculo do valor do deslocamento no ponto de aplicação da carga estática, para além de dividir a viga e resolver cada uma das suas partes como viga semi-infinita, foi necessário aplicar as condições de compatibilidade de deslocamento e de rotação no ponto onde ocorrem estas alterações de características. Deste modo, estabeleceu-se os esforços internos, nomeadamente a força de corte  $V$  e o momento flector  $D$ , no ponto onde ocorrem estas modificações.

As expressões 3.9 e 3.10 apresentam, respectivamente, as soluções que permitem determinar o valor exacto dos deslocamentos e das rotações, para o caso de uma viga semi-infinita. Estas, são válidas para  $x > 0$ .

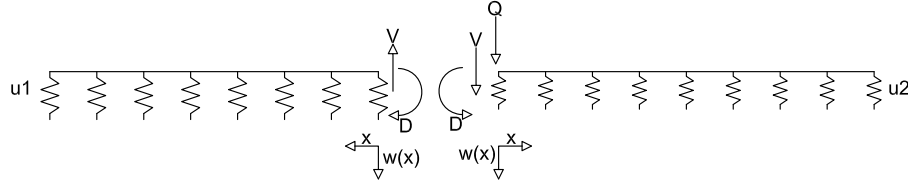
$$w(x) = \frac{2 \cdot \beta \cdot F}{u} \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos(\beta x) - \frac{2 \cdot \beta^2 \cdot M}{u} \cdot e^{-\beta x} \cdot [\cos(\beta x) - \sin(\beta x)] \quad (3.9)$$

$$\theta(x) = -\frac{2 \cdot \beta^2 \cdot F}{u} \cdot e^{-\beta x} \cdot [\cos(\beta x) + \sin(\beta x)] + \frac{4 \cdot \beta^3 \cdot M}{u} \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos(\beta x) \quad (3.10)$$

Onde  $F$  e  $M$  são, respectivamente, uma carga concentrada e um momento flector aplicados à viga. O sentido positivo da primeira é de cima para baixo. Já para o momento flector o sentido positivo corresponde ao sentido dos ponteiros do relógio.

Na Figura 3.8, traduz-se esquematicamente o que foi dito em relação aos esforços internos.  $V$  e  $D$  são as forças de acção-reacção que cada metade da viga aplica na outra parte, enquanto  $Q$  corresponde à carga de roda aplicada.

Para um correcto procedimento de resolução, definiu-se, em primeiro lugar, os diferentes

Figura 3.8: Esforços internos: força de corte  $V$  e momento flector  $D$ 

tipos de solo fundados sob a viga. Deste modo,  $u_1$  corresponde a um solo mole enquanto  $u_2$  corresponde a um solo rijo, com módulos de via, respectivamente, de  $3000kN/m^2$  e de  $50000kN/m^2$ , de acordo com a Tabela 2.3.

Assim, foi exequível determinar as relações 3.11 e 3.12 independentemente do tipo de carril seleccionado na Tabela 2.6.

$$u_2 = \frac{50}{3}u_1 \quad (3.11)$$

$$\beta_2 = 2.021\beta_1 \quad (3.12)$$

Seguidamente, apresentam-se as equações de compatibilidade referidas anteriormente, de deslocamento, 3.13, e de rotação, 3.14, tendo em consideração as relações 3.11 e 3.12.

Para ambas as metades da viga, o valor do deslocamento  $w$  e da rotação  $\theta$  são iguais em  $x = 0m$ . Deste modo, é possível escrever as expressões 3.13 e 3.14.

$$-\frac{2\beta_1 V}{u_1} + \frac{2\beta_1^2 D}{u_1} = \frac{2(2.021\beta_1)(Q + V)}{\frac{50}{3}u_1} - \frac{2(2.021\beta_1)^2 D}{\frac{50}{3}u_1} \quad (3.13)$$

$$-\frac{2\beta_1^2 V}{u_1} + \frac{4\beta_1^3 D}{u_1} = \frac{2(2.021\beta_1)^2 (Q + V)}{\frac{50}{3}u_1} - \frac{4(2.021\beta_1)^3 D}{\frac{50}{3}u_1} \quad (3.14)$$

Através destas duas, obteve-se os resultados para os esforços internos de uma viga semi-infinita, apresentados através das expressões 3.15 e 3.16.

$$D = \frac{0.068667Q}{\beta} \quad (3.15)$$

$$V = -0.031897Q \quad (3.16)$$

Substituindo 3.15 e 3.16 na parcela da direita, ou da esquerda, da equação 3.13, determinou-se a expressão 3.17, em função do valor da carga aplicada, do tipo de carril e do módulo da via. Esta, permite obter o valor do deslocamento no ponto de aplicação da carga de roda para

uma via com variação de rigidez na fundação.

$$w = \frac{0.201128Q.\beta_1}{u_1} \quad (3.17)$$

A utilização da expressão 3.17, é válida quando a carga está aplicada sobre o ponto onde ocorrem as alterações das características da via ferroviária.

### 3.1.3 Comboio de cargas sem variação de rigidez

Nesta sub-secção, o principal objectivo consistiu na determinação do valor dos deslocamentos provocados pela acção de um comboio de cargas, constituído, como a Figura 3.9 apresenta, por dois *bogies* cada um com duas rodas.

Deste modo, serão aplicadas na via, representada mais uma vez por uma viga infinita e sem variação de rigidez de fundação ao longo de todo o seu comprimento, quatro cargas de roda estáticas.

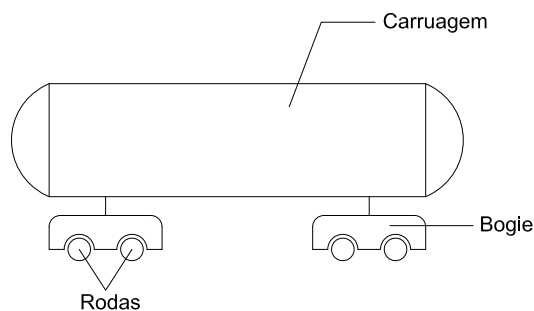


Figura 3.9: Esquema representativo de uma carruagem e os seus elementos constituintes

A Figura 3.10, exhibe o modelo de cálculo utilizado para a determinação do valor dos deslocamentos. Conforme foi anteriormente mencionado, a viga de comprimento infinito está assente sob um solo em que a rigidez de fundação é constante.

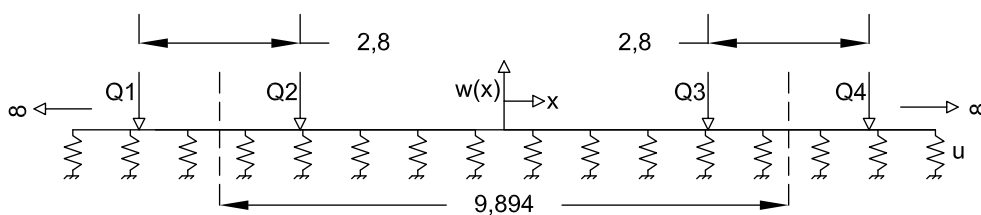


Figura 3.10: Modelo de cálculo utilizado para obtenção de esforços de um comboio de cargas com quatro eixos

Em relação aos dados relativos às distâncias entre as rodas de cada *bogie*, designada por empate, ou à distância de eixo a eixo entre estes elementos, dependem, obviamente, do tipo de veículo ferroviário considerado. Para este trabalho, os dados presentes na Figura 3.10 estão de acordo com alguns veículos apresentados em Teixeira (2009).

Assim, de acordo com a Figura, as rodas de cada *bogie* estão afastadas uma da outra 2.8m. Em relação à distância de eixo a eixo destes elementos, esta é de 9.894m estando a origem do



referencial a meio deste comprimento.

O valor do deslocamento individual de cada carga de roda foi obtido através da expressão 3.18.

$$w(x) = -\frac{Q}{2u} \cdot \frac{1}{L} \cdot e^{-\frac{|x|}{L}} \cdot \left[ \cos \frac{|x|}{L} - \sin \frac{|x|}{L} \right] \quad (3.18)$$

Já o valor final do deslocamento é dado por:

$$w_T = w(x = -6.347) + w(x = -3.547) + w(x = 3.547) + w(x = 6.347) \quad (3.19)$$

As distâncias referidas na expressão 3.19,  $6.347m$  e  $3.547m$ , correspondem à distância da origem dos eixos até às cargas  $Q1$  e  $Q4$  e até às cargas  $Q2$  e  $Q3$ , respectivamente.

Importa referir, que para o estudo efectuado nesta sub-secção não foram considerados diferentes valores para cada carga de roda, ou seja, todas as cargas presentes num comboio apresentam sempre o mesmo valor. Desta forma, não será possível visualizar num único veículo ferroviário diferentes valores para  $Q1$ ,  $Q2$ ,  $Q3$  ou  $Q4$ .

### **Apresentação de resultados**

Os resultados obtidos, através do modelo de cálculo representado na Figura 3.10 bem como das expressões 3.18 e 3.19, são apresentados e organizados nesta sub-secção tal como em 3.1.1, ou seja, em dois casos de estudo. Desta forma, os diferentes casos são constituídos por duas situações de vias ferroviárias distintas, especificamente vias que apresentam a mesma carga de roda aplicadas em diferentes tipos de carris e vias com diferentes cargas aplicadas no mesmo modelo de carril.

Em cada caso serão apresentadas duas Figuras, sendo que estas apresentam as deformadas provocadas pelas referidas cargas para cada uma das situações referidas em cima.

Mais uma vez, o primeiro caso de estudo é referente a um solo rijo enquanto o segundo é alusivo a um solo mole. Os valores que caracterizam a rigidez de cada solo podem ser consultados, novamente, na Tabela 2.3.

Os resultados aqui presentes foram obtidos, novamente, através de programação realizada pelo autor desta dissertação em *Matlab*.

### **Primeiro caso de estudo**

As Figuras 3.11 e 3.12, apresentam os resultados obtidos para duas situações de vias ferroviárias, fundadas em solo de classe  $QS3$ , com características distintas.

Assim, a primeira é alusiva a duas vias sujeitas a uma carga de roda de  $80kN$  aplicada em carris do tipo  $UIC - 54$  e  $UIC - 60$ , enquanto a segunda é referente às soluções determinadas para vias ferroviárias constituídas por um carril  $UIC - 60$  e sujeitas a cargas de roda de  $80kN$  e de  $100kN$ .

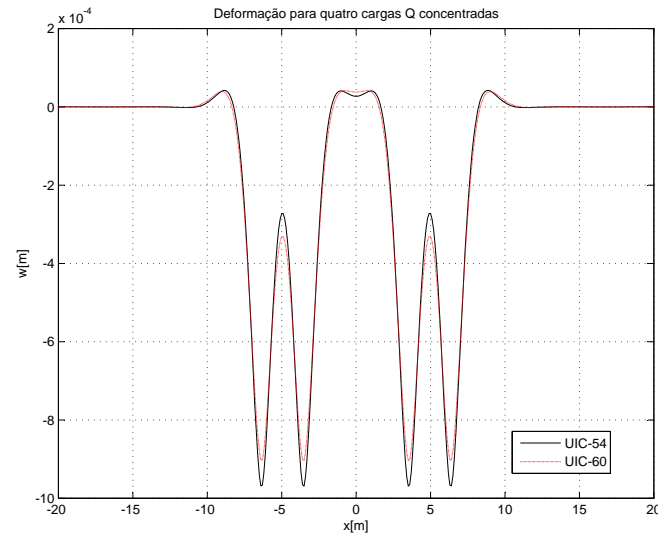


Figura 3.11: Comboio de cargas a actuar em solos rijos, com carga de  $80kN$  aplicada em diferentes tipos de carris

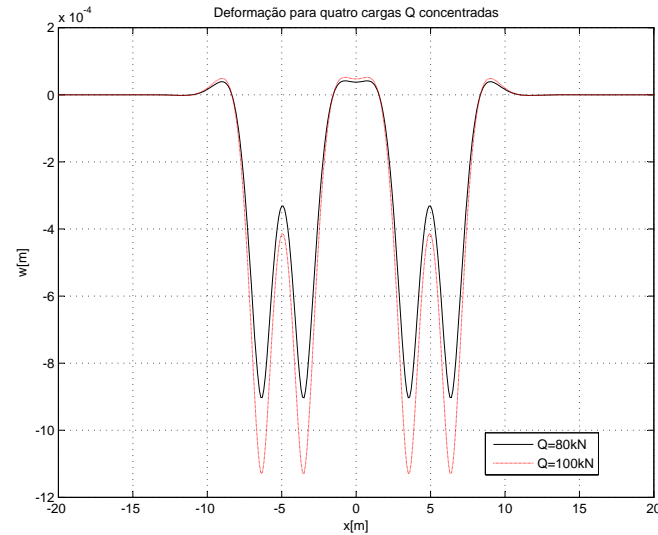


Figura 3.12: Comboio de cargas a actuar em solos rijos, constituídas por carril  $UIC - 60$ , sujeitas a diferentes tipos de cargas

Tal como para o caso de uma carga estática sem variação de rigidez, estudado na secção 3.1.1, as Figuras 3.11 e 3.12 evidenciam que os deslocamentos são superiores para as vias constituídas por um carril do tipo  $UIC - 54$ , mais uma vez devido ao facto da rigidez de flexão, para este carril, ser menor, e para valores de carga de roda superiores.

Também em ambas as situações, se verifica que o valor de  $x$  onde os deslocamentos apresentam valores insignificantes ocorre, praticamente, no mesmo local, independentemente da

diferença de valores entre as cargas de roda aplicadas ou do tipo de carril em utilização.

### Segundo caso de estudo

No presente caso de estudo, analisa-se o valor dos deslocamentos para uma via sujeita a um comboio de cargas fundada num solo mole, de classe  $QS1$  de acordo com a Tabela 2.4.

As Figuras 3.13 e 3.14 exibem, respectivamente, os resultados determinados para uma carga de  $100kN$  a actuar em carris  $UIC - 54$  e  $UIC - 60$  e para um carril  $UIC - 54$  sujeito à acção de cargas de  $100kN$  e  $112.5kN$ .

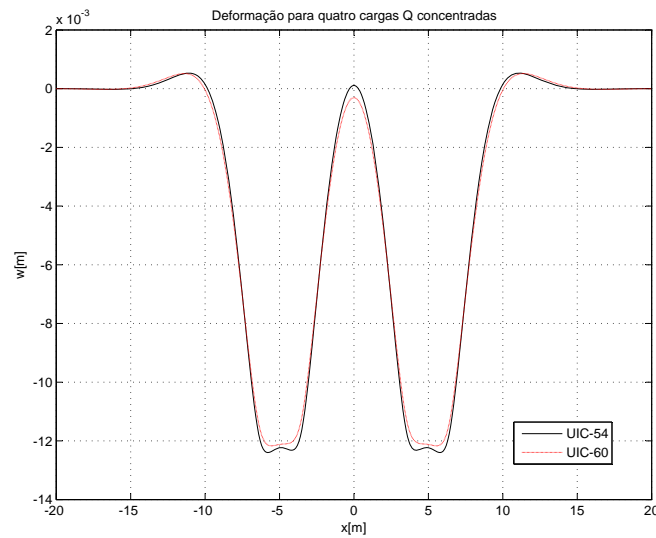


Figura 3.13: Comboio de cargas a actuar em solos moles, com carga de  $100kN$  aplicada em diferentes tipos de carris

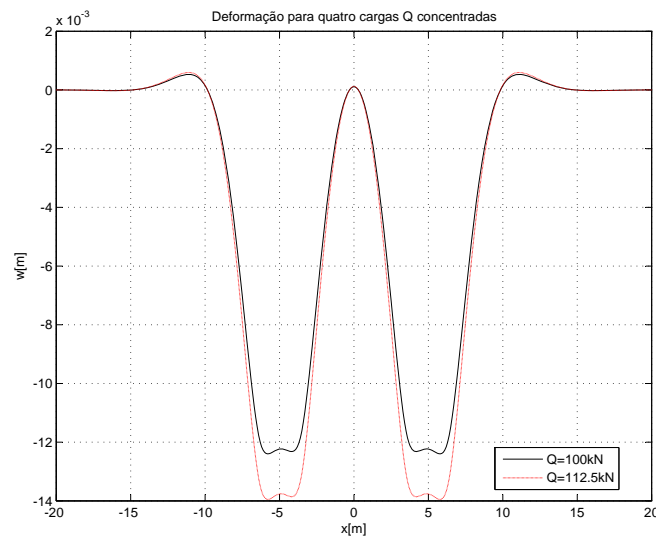


Figura 3.14: Comboio de cargas a actuar em solos moles, constituídas por carril  $UIC - 54$ , sujeitas a diferentes tipos de cargas

Conclui-se, mais uma vez, o que foi referido para o primeiro caso de estudo e, consequentemente, o que se verificou para a acção de uma carga de roda estática a actuar sobre um solo

de fundação sem variação de rigidez, estudado em 3.1.1, ou seja, o valor dos deslocamentos são superiores para um carril *UIC* – 54 e para valores de carga de roda superiores.

Para a primeira situação, ou seja, vias em que a mesma carga de roda está aplicada em diferentes tipos de carris, Figura 3.13, verificou-se que o valor de  $x$  para o qual os deslocamentos deixam de ter interesse prático é basicamente o mesmo para ambos os carris. Já para o segundo caso, Figura 3.14, analisou-se que, independentemente do tipo de carril, *UIC* – 54 ou *UIC* – 60, o valor de  $x$  para o qual o valor dos deslocamentos são insignificantes, é o mesmo qualquer que seja o valor da carga de roda aplicada.

### Comparação entre os diferentes casos de estudo

Finalmente, de modo a concluir o estudo de um comboio de cargas a actuar sobre uma via ferroviária com rigidez de fundação constante, realizou-se nesta sub-secção uma comparação entre o primeiro e o segundo caso de estudo, ou seja, entre uma via fundada num solo de classe *QS3* e *QS1*, respectivamente.

Na Figura 3.15, exibem-se os resultados obtidos para uma via constituída por um carril *UIC* – 60 sujeita a acção de uma carga de roda de  $80kN$ .

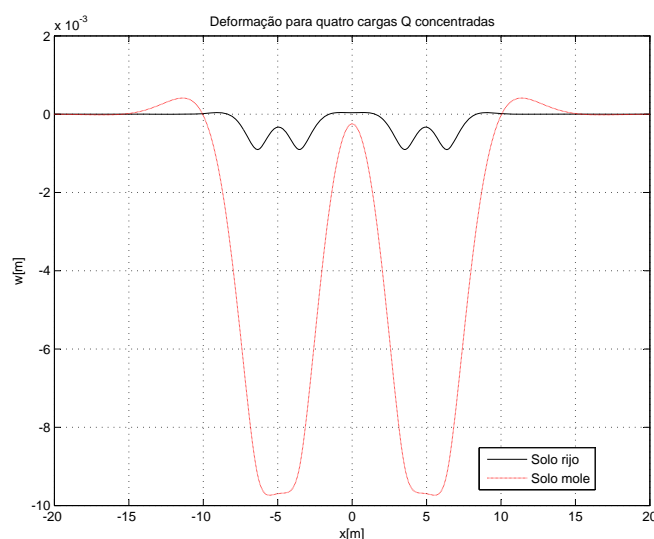


Figura 3.15: Comparação de vias, fundadas em solo rijo e solo mole, constituídas por um carril *UIC* – 60 sujeita a uma carga de  $80kN$

Através da visualização da Figura 3.15, conclui-se que os deslocamentos são superiores para um solo de características moles, qualquer que seja o valor da carga aplicada e o modelo de carril aplicado.

Tendo em atenção, também, as Figuras apresentadas para o primeiro e segundo caso de estudo, respectivamente as Figuras 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14, analisa-se que na zona intermédia entre os dois *bogies*, ou seja, na origem do referencial, o valor dos deslocamentos são praticamente nulos para um solo de características moles, enquanto para um solo rijo tal não se verifica, ocorrendo para esta última situação um pico correspondente ao valor máximo positivo de deslocamento.

É de salientar, também, que para ambos os tipos de solo os deslocamentos máximos ocorrem por baixo do ponto de aplicação da carga de roda  $Q$ . No entanto, apesar disto, para um solo de classe  $QS3$  verifica-se com melhor exactidão a influência dos deslocamentos provocados pelas rodas de cada *bogie*, pois conforme se verifica na Figura 3.12, por exemplo, após ocorrer os deslocamentos máximos no ponto onde a carga está aplicada, o valor do deslocamento diminui substancialmente até meio da distância das rodas de cada *bogie*, aumentando novamente até ao ponto de aplicação da outra carga. Ao contrário, para um solo de classe  $QS1$ , Figura 3.14, a influência não é tão notada, pois não se verifica praticamente nenhuma diferença no valor do deslocamento entre as rodas de cada *bogie*.

## Conclusões

Concluiu-se, para ambos os casos de estudo e para a situação em que se comparam ambos os casos, que os deslocamentos são superiores quanto maior for o valor da carga de roda  $Q$ , para solos com características moles e para um carril  $UIC - 54$ .

Em relação aos valores de  $x$  onde o valor dos deslocamentos deixam de ter interesse prático, ou seja, são muito próximos de zero, é praticamente o mesmo para situações em que se comparam vias com diferentes cargas de roda a actuar sobre mesmo tipo de carril, Figuras 3.12 e 3.14, e para casos em que a mesma carga de roda actua sobre diferentes tipos de carris, Figuras 3.11 e 3.13. Já para vias que apresentem o mesmo tipo de carril e a mesma carga de roda  $Q$ , o deslocamento, para além de ser superior num solo mole, anula-se num valor de  $x$  mais afastado da origem do referencial,  $x = 0m$ , para este tipo de solo, tal como mostra a Figura 3.15.

Apesar de não serem apresentados resultados para outros veículos ferroviários, é possível afirmar que quanto maior for o valor do empate, ou seja, quanto maior for a distância entre as rodas de cada *bogie*, menor são os esforços verticais transmitidos à via.

## 3.2 Solução numérica

A consideração de modelos numéricos, que permitem simular de forma realista e completa situações verídicas, surgiram como alternativa ao cálculo analítico, tendo como principal objectivo de superar as limitações destas abordagens.

O grande crescimento deste tipo de soluções, nomeadamente o Método dos Elementos Finitos, ocorreu juntamente com o desenvolvimento dos computadores, ou seja, entre as décadas de 60/70. Antes, as análises efectuadas eram de elevada complexidade e muito morosas.

Deste modo, com o progresso da tecnologia e, tal como referido, com o crescimento da utilização dos computadores, a determinação de soluções deste género realiza-se assim através de programas de cálculo automático aplicados nestes aparelhos, pelo que o tempo de resolução destas análises se reduziu substancialmente.

Devido ao que foi dito anteriormente, os métodos numéricos dos elementos finitos, ou das

diferenças finitas ou dos elementos de fronteira, passaram a ser ferramentas úteis e viáveis na resolução de muitos problemas, principalmente em problemas dinâmicos. No Capítulo 4, secção 4.2, efectuar-se-á uma análise de um modelo numérico aplicado para uma carga dinâmica.

A formulação do Método dos Elementos Finitos pode ser fundamentada em métodos muito simples, como é o caso, por exemplo, do Método dos Deslocamentos. Este foi o método utilizado na realização do modelo numérico no presente Capítulo, pois para além de ser muito simples é, consequentemente, o que apresenta maior versatilidade.

Assim, nesta secção realizou-se um modelo de cálculo numérico, baseado no Método dos Elementos Finitos, que tem, também, como principal objectivo, além de muitos outros, a determinação dos deslocamentos provocados pela imposição de cargas de roda, o valor da força transmitida às travessas para diferentes situações e a influência que o espaçamento entre estes elementos pode apresentar.

No entanto, em determinadas secções, especificamente em 3.2.1 e 3.2.2, a principal finalidade foi, unicamente, a realização de uma comparação entre os resultados obtidos para a solução analítica e para a solução numérica.

## Descrição do modelo numérico

A formulação do Método dos Elementos Finitos utilizada neste Capítulo para realização do modelo numérico, foi baseada no método dos deslocamentos e na discretização de uma estrutura em várias sub-estruturas. Cada uma destas, denominadas por elementos finitos, apresentam um comportamento conhecido pelo que, o comportamento global de toda a estrutura é o resultado da soma do comportamento de todos os elementos finitos. Finalmente, cada um destes elementos apresentam  $n$  nós, sendo que cada nó possui vários graus de liberdade.

Desta forma, e tal como sucedeu para a solução analítica, a via ferroviária modelada através deste modelo é constituída por uma viga e um conjunto de várias molas com determinada rigidez, por forma a simular o carril e as travessas, respectivamente.

O primeiro ponto a ser discutido consistiu na escolha do tipo de viga a utilizar para modelar o carril.

Optou-se, deste modo, por simular o carril através de uma viga do tipo Euler-Bernoulli em detrimento de uma viga de Timoshenko. De acordo com Azevedo (2003), para as primeiras considera-se que as secções mantêm-se planas e normais ao eixo da viga após a deformação pelo que, a deformação devido ao corte não é considerada.

Pelo contrário, para a viga de Timoshenko as secções planas mantêm-se planas. No entanto, após a deformação uma secção normal ao eixo da viga não mantém essa característica. Assim, o esforço de corte é considerado.

Tal como foi mencionado inicialmente, o método de resolução elegido consistiu no método dos deslocamentos. Basicamente, este método resume-se na divisão de uma estrutura em várias sub-estruturas, designadas por elementos finitos, sendo os pontos onde estes elementos se dividem denominados por nós ou por pontos nodais. Nestes, encontram-se presentes os possíveis graus de liberdade existentes.

A Figura 3.16, apresenta um exemplo do modelo utilizado para o presente trabalho.

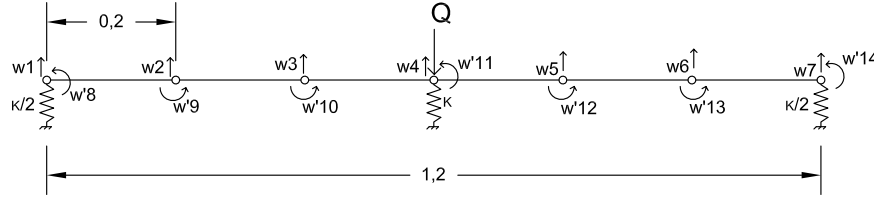


Figura 3.16: Discretização de uma viga de Euler-Bernoulli, constituída por seis elementos finitos

Conforme se pode observar, a viga presente na referida Figura é constituída por seis elementos finitos, cada um com  $0.2m$  de comprimento, e, conseqüentemente, sete pontos nodais. Em cada ponto foram considerados dois graus de liberdade, nomeadamente os deslocamentos verticais e as rotações pelo que, existem catorze deslocamentos independentes. No entanto, realizou-se um processo de condensação, cuja explicação do procedimento será realizada mais a frente, por forma a considerar apenas a contribuição dos deslocamentos verticais.

Em relação às molas de rigidez  $k$ , que como foi referido inicialmente representam as travessas, estão, deste modo, afastadas de acordo com o espaçamento destes elementos.

Foi eleito, para o presente estudo, um afastamento padrão de  $0.60m$ . Assim, tendo em consideração que cada elemento finito apresenta  $0.20m$ , de três em três elementos existe uma mola.

Ainda em relação a estes elementos, e ao contrário do que se visualizou para a solução analítica, para os resultados obtidos através do modelo numérico as molas não estão distribuídas uniformemente, mas sim pontualmente, ou seja, localizam-se somente no local de cada travessa. Deste modo, as molas terão como unidades  $kN/m$ . O valor da sua rigidez resulta da multiplicação entre os valores definidos para o módulo da via,  $u[kN/m^2]$  e do espaçamento entre as travessas  $[m]$ .

Refere-se que, tal como a Figura 3.16 exhibe, foram numerados em primeiro lugar os deslocamentos verticais e, somente depois, se numerou as rotações.

Segundo Azevedo (2003), cada deslocamento independente corresponde a um grau de liberdade. Este pode ser expresso por um deslocamento nodal através de uma função de interpolação, ou uma função de forma,  $\phi_i(x)$ , de terceiro grau. Assim, em cada grau de liberdade são consideradas as seguintes propriedades: a função de interpolação apresenta valor unitário no grau de liberdade considerado, enquanto para os restantes são nulos; estas

mesmas funções são linearmente independentes, contínuas e com primeira derivada contínua; e, finalmente, estão em conformidade com as condições de fronteira do elemento em estudo.

Então, de acordo com o referido, o campo de deslocamentos  $w(x)$  que descreve o deslocamento total pode ser traduzido através da expressão 3.20.

$$w(x) = \sum w_i \cdot \phi_i(x) \quad (3.20)$$

Onde  $w_i$  é o deslocamento considerado no grau de liberdade  $i$  e  $\phi_i(x)$ , correspondente à função de interpolação, define o deslocamento do elemento  $i$  devido a um deslocamento unitário imposto nesse mesmo grau de liberdade, sendo nulo para os restantes.

A expressão 3.20 permite confirmar, que o deslocamento total do elemento é o resultado do somatório dos vários elementos finitos considerados.

De acordo com Chopra (1995), considerando no estudo a viga de Euler-Bernoulli, as deformações por corte podem ser desprezadas. Assim, para esta situação, a equação diferencial que rege o comportamento do campo de deslocamentos  $w(x)$ , para um valor de rigidez de flexão constante, é dada pela expressão 3.21.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (3.21)$$

Deste modo, numa situação inicial onde se apresenta uma viga rectilínea de secção transversal constante, é possível obter o valor das deformações para os diversos pontos nodais, quando aplicada uma carga de roda  $Q$ . A expressão 3.22 possibilita a obtenção destes resultados.

$$[K] \cdot \bar{w} = \bar{F} \quad (3.22)$$

Onde  $[K]$  corresponde à matriz de rigidez da viga,  $\bar{F}$  ao vector de forças que estão aplicadas na viga e, por fim,  $\bar{w}$  ao vector de deslocamentos.

Assim, com a realização de um cálculo simples como é a aplicação da expressão 3.22, obtém-se, facilmente, o valor dos deslocamentos dos vários pontos nodais através da determinação do vector  $\bar{w}$ , bastando para esse efeito determinar a matriz de rigidez e de forças aplicadas à viga.

### Condensação da matriz de rigidez

Conforme se referiu na secção 3.2, inicialmente consideraram-se dois graus de liberdade por cada ponto nodal, nomeadamente os deslocamentos verticais e as rotações. No entanto, somente os primeiros têm interesse prático para determinação dos deslocamentos. Assim, foi efectuado um processo de condensação, que aqui é explicado de acordo com Chopra (1995), por forma a eliminar a contribuição das rotações.



Deste modo, numa primeira fase explica-se o procedimento correcto de realização e, seguidamente, aplica-se este processo ao exemplo apresentado na Figura 3.16.

Considerando-se a seguinte matriz de rigidez:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{tt} & k_{t0} \\ k_{0t} & k_{00} \end{bmatrix}$$

A matriz condensada  $k_c$  é dada através da seguinte expressão:

$$k_c = k_{tt} - k_{0t}^T \times k_{00}^{-1} \times k_{0t} \quad (3.23)$$

ou

$$k_c = k_{tt} - k_{t0} \times k_{00}^{-1} \times k_{0t} \quad (3.24)$$

pois

$$k_{0t}^T = k_{t0} \quad (3.25)$$

Utilizou-se como exemplo, para simplificar o processo explicativo da condensação, a Figura 3.16 onde existem catorze deslocamentos independentes, mas, não obstante, pretende-se unicamente considerar os deslocamentos verticais, ou seja, de  $w_1$  a  $w_7$ .

Assim, as matrizes definidas anteriormente,  $k_{tt}$ ,  $k_{0t}$  e  $k_{00}$ , utilizadas para realizar este procedimento apresentam-se, respectivamente, em 3.26, 3.27 e 3.28.

$$k_{tt} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & . & . & . & k_{1,7} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ k_{7,1} & . & . & . & k_{7,7} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$k_{0t} = \begin{bmatrix} k_{8,1} & . & . & . & k_{8,7} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ k_{14,1} & . & . & . & k_{14,7} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

e

$$k_{00} = \begin{bmatrix} k_{8,8} & . & . & . & k_{8,14} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ k_{14,8} & . & . & . & k_{14,14} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Aplicando a expressão 3.23, obtém-se a matriz  $k_c$  para o exemplo demonstrado através da Figura 3.16.

O procedimento aqui apresentado, foi realizado nos cálculos efectuados posteriormente.

### Matriz de rigidez

A matriz de rigidez presente na equação 3.22 resulta da soma de duas matrizes, nomeadamente a matriz de rigidez obtida a partir dos deslocamentos independentes do elemento em estudo e da matriz de rigidez correspondente às molas.

Em relação à primeira, foi obtida através do princípio dos deslocamentos virtuais, conforme a expressão 3.29 demonstra.

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \cdot \phi_i''(x) \cdot \phi_j''(x) dx \quad (3.29)$$

Onde  $k_{ij}$  corresponde, por definição, à força no grau de liberdade  $i$  devido ao deslocamento unitário no grau de liberdade  $j$ .

Esta expressão é válida para uma viga com rigidez à flexão  $EI$  constante ao longo de todo o seu comprimento.

Relativamente à matriz de rigidez devido à acção das molas, esta é apenas constituída pelos valores que caracterizam a sua rigidez nos pontos nodais onde elas existem.

Usando como exemplo a Figura 3.16, apresenta-se de seguida, em 3.30, a matriz de rigidez das molas relativa ao modelo de viga aí demonstrada.

$$k_{mola} = \begin{bmatrix} k_1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & & & & & . \\ . & & 0 & & & & . \\ . & & & k_2 & & & . \\ . & & & & 0 & & . \\ . & & & & & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & k_3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Esta matriz já se encontra na forma condensada. Conforme se visualiza, as rigidezes das molas são colocadas na diagonal e apenas no local onde elas existem, sendo os restantes valores nulos.

A rigidez  $k_1$  corresponde à mola representada do lado esquerdo,  $k_3$  à localizada do lado direito e  $k_2$  à que se encontra por baixo do ponto de aplicação da carga de roda.

## Determinação do comprimento do modelo numérico

Antes de se proceder à determinação de resultados através do modelo numérico, determinou-se, em primeiro lugar, o número de elementos necessários para que a solução obtida por este modelo apresente resultados muito próximos aos fornecidos através da solução analítica, ou seja, calculou-se o comprimento, para o modelo numérico, da via ferroviária para o qual as condições de fronteira deste correspondem às condições de fronteira da solução analítica, isto é, deslocamentos e rotações nulos.

Este processo foi realizado através do cálculo da área compreendida entre as duas curvas representativas da solução analítica e da solução numérica, como se demonstra na Figura 3.17, para vários elementos. Assim, o número de elementos necessários para obtenção de resultados semelhantes para ambas as soluções, é determinado quando o valor desta área for praticamente nula.

Salientar que, esta área foi calculada através da Regra dos Trapézios.

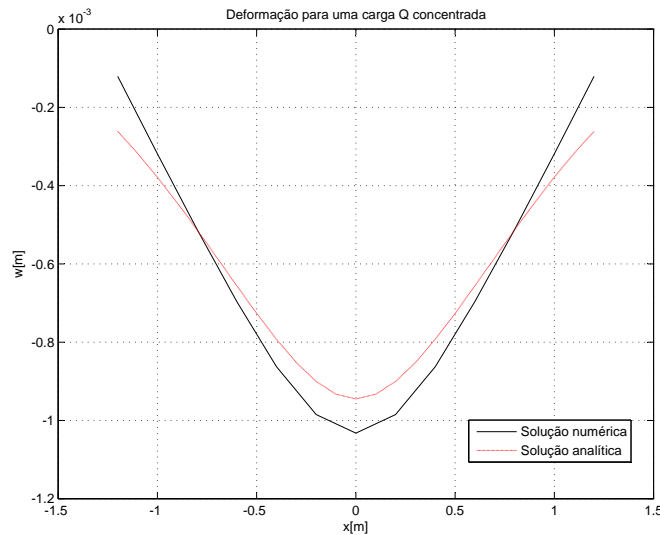


Figura 3.17: Solução analítica e numérica obtidas para uma carga de  $80kN$  aplicada num carril *UIC* – 60, fundada num solo rijo

A Figura 3.17 apresenta a solução numérica e analítica para um carril *UIC* – 60 colocado sobre um solo de classe *QS3*, sujeita a uma carga de  $80kN$ . O modelo numérico para a solução aqui presente é constituído por doze elementos.

Este procedimento foi efectuado para diferentes cargas de roda, diferentes tipos de carris e diferentes solos de fundação. No entanto, todos os resultados obtidos são unânimes em relação

ao número de elementos para o qual o modelo numérico apresenta resultados muito próximos aos da solução analítica. Conforme se referiu anteriormente, quanto menor o valor da área compreendida entre as duas soluções, mais próximos são os resultados obtidos entre estas.

Como exemplo, apresenta-se na Figura 3.18 a área referida anteriormente para uma via fundada num solo rijo, classe *QS3*, constituída por um carril *UIC-60* e sujeita a uma carga de roda de  $112.5kN$ . Conforme se pode visualizar, para 54 elementos, ou seja, 19 molas, o valor da área compreendida entre as duas soluções é aproximadamente zero, pelo que, a partir deste comprimento os resultados obtidos pela solução numérica são bastante próximos aos obtidos pela solução analítica. No entanto, quanto maior for o número de elementos do modelo numérico, menor a área entre as duas soluções e, consequentemente, melhor a aproximação à solução analítica.

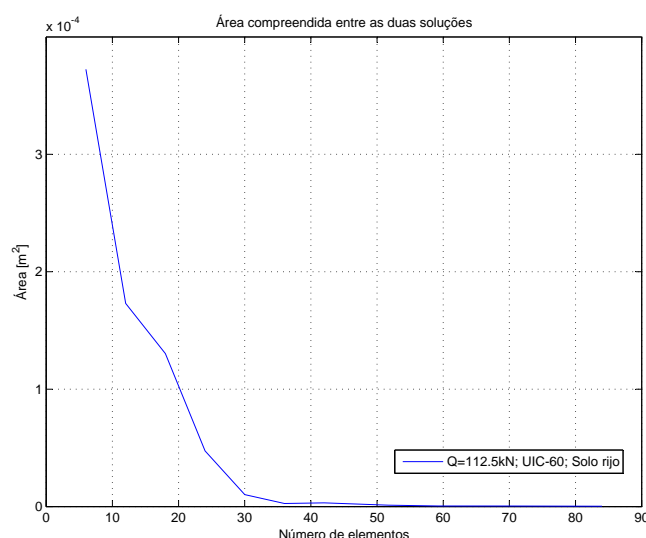


Figura 3.18: Área compreendida entre as duas soluções - solução analítica e solução numérica

Deste modo, todos os resultados presentes ao longo desta secção foram obtidos para um modelo numérico constituído por 84 elementos, ou seja, 29 molas. Como cada elemento apresenta  $0.20m$ , o comprimento total do modelo em estudo é de  $16.8m$ .

Conforme se visualiza na Figura 3.18, iniciou-se este cálculo a partir de uma situação inicial constituída por seis elementos, representada na Figura 3.16.

A Figura 3.19 apresenta o modelo de cálculo adoptado para determinação dos deslocamentos e de esforços no presente Capítulo, de acordo com o referido anteriormente, ou seja, constituído por 84 elementos.

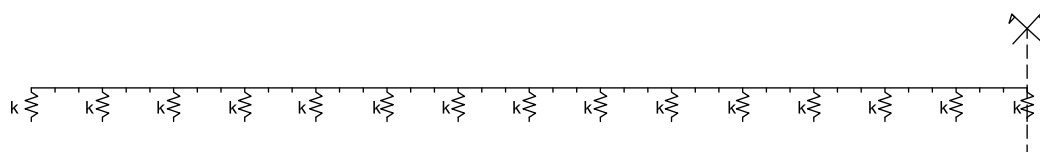


Figura 3.19: Modelo adoptado para determinação dos deslocamentos e dos esforços na via

Por fim, e como foi primeiramente mencionado, para o modelo numérico as molas de rigidez  $k[kN/m]$  estão colocadas somente no local de cada travessa, ou seja, de  $0.6m$  em  $0.6m$ , pelo que, ao valor do módulo da via considerado para cada tipo de solo, foi necessário multiplicar pelo espaçamento entre travessas. Assim, aproximaram-se os resultados obtidos através deste modelo com os do cálculo analítico.

Para finalizar o processo explicativo do modelo numérico utilizado na presente secção, apresenta-se, seguidamente, na Tabela 3.3 os valores utilizados para caracterizar a rigidez das molas.

Tabela 3.3: Rigidez das molas para o modelo numérico

Tipo de solo	Rigidez das molas $[kN/m]$
Rijo	30000
Mole	1800
Médio	15000

### 3.2.1 Carga concentrada sem variação de rigidez

Na presente secção, determinaram-se os deslocamentos provocados pela acção de uma carga de roda estática aplicada na origem do referencial, conforme a Figura 3.20 representa, para uma via fundada num solo com rigidez de fundação constante.

O valor desta carga de roda corresponde aos valores apresentados na Tabela 2.5.

Realizou-se também, uma comparação entre os resultados obtidos através deste modelo e os apresentados para a solução analítica, expostos na secção 3.1.1.

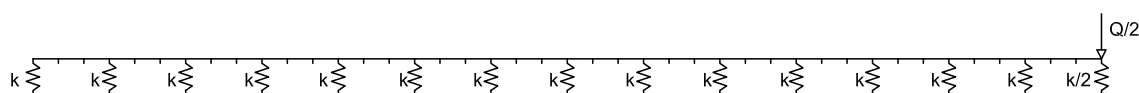


Figura 3.20: Modelo de cálculo utilizado para o cálculo de deslocamentos provocado por uma carga concentrada estática

### Apresentação de resultados

Por forma a obter uma melhor estruturação do trabalho desenvolvido, e tal como se efectuou para os estudos realizados anteriormente, os resultados aqui expostos encontram-se divididos em dois casos de estudo. Assim, o primeiro caso diz respeito a vias ferroviárias fundadas em solos de classe *QS3*, enquanto o segundo refere-se a vias fundadas em solos de classe *QS1*.

Para cada caso de estudo, apresenta-se uma Figura onde se encontram as deformadas obtidas através da solução numérica e da solução analítica, com o principal objectivo de analisar a diferença entre ambas. Seguidamente, visualiza-se uma Tabela onde se mostram os resultados exactos dos deslocamentos no ponto de aplicação da carga de roda.

Determinou-se também, o valor do erro relativo, em valor absoluto, entre as duas soluções através da expressão 3.31.

$$Erro\ relativo[\%] = \frac{|w_{exacto} - w_{aproximado}|}{|w_{exacto}|} \times 100 \quad (3.31)$$

Na utilização desta expressão, os valores obtidos através da solução analítica foram considerados exactos.

Por último, mais uma vez os resultados apresentados foram obtidos através de programas de cálculo automático efectuados em *Matlab*.

### Primeiro caso de estudo

A Figura 3.21 e a Tabela 3.4 exibem as soluções obtidas, para o primeiro caso de estudo, referente a uma via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 60 sujeita à acção de uma carga de roda de  $112.5kN$ .

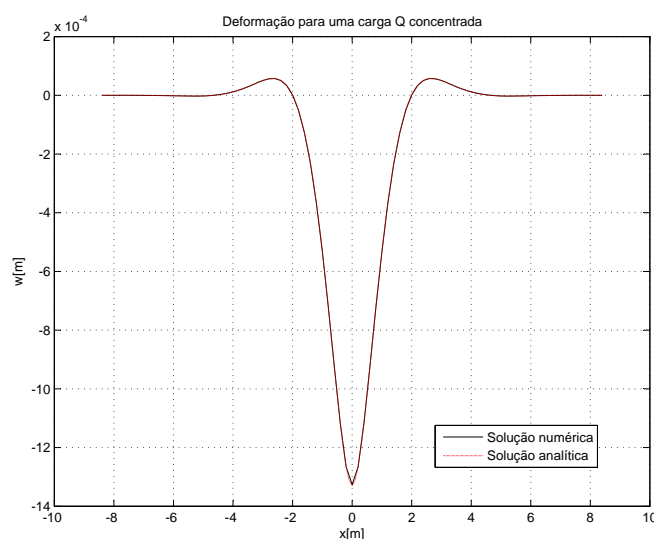


Figura 3.21: Via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 60 sujeita a uma carga de  $112.5kN$ , em solo rijo

Tabela 3.4: Deslocamento para uma via ferroviária, fundada em solo rijo, sujeita à acção de uma carga de  $112.5kN$  aplicada num carril *UIC* – 60

Tipo de solução	Deslocamento no ponto de aplicação da carga [m]
Solução analítica	–0.001329
Solução numérica (84 elementos)	–0.001326
<b>Erro relativo [%]</b>	
0.227	

Conforme se visualiza através da referida Figura e da Tabela 3.4, a solução numérica

apresenta resultados muito semelhantes à solução analítica, para todo o comprimento da via.

Em relação ao ponto de aplicação da carga de roda, em  $x = 0m$ , e como se verifica especificamente através da Tabela 3.4, o erro relativo entre as duas soluções é de 0.227%, pelo que se pode concluir que, para este caso, o modelo numérico é uma boa aproximação à solução analítica.

### Segundo caso de estudo

Em relação ao segundo caso de estudo, analisou-se uma via ferroviária com características iguais ao caso anterior, ou seja, constituída por um carril *UIC* – 60 e sujeita a uma carga de roda de  $112.5kN$ . A Figura 3.22 e a Tabela 3.5 apresentam os resultados obtidos.

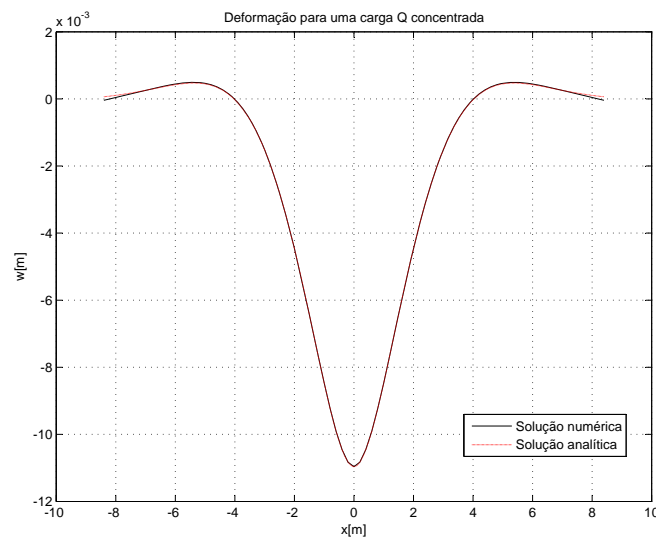


Figura 3.22: Via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 60 sujeita a uma carga de  $112.5kN$ , em solo mole

Tabela 3.5: Deslocamento para uma via ferroviária, fundada em solo mole, sujeita à acção de uma carga de  $112.5kN$  aplicada num carril *UIC* – 60

Tipo de solução	Deslocamento no ponto de aplicação da carga [m]
Solução analítica	−0.010963
Solução numérica (84 elementos)	−0.010964
<b>Erro relativo [%]</b>	
0.004	

Tal como se visualizou para o primeiro caso de estudo, a solução obtida através do modelo numérico representado na Figura 3.20, apresenta resultados muito semelhantes aos obtidos para a solução analítica para todo o comprimento da via, tal como se verifica na Tabela 3.5, especificamente para  $x = 0m$ , onde o valor do erro entre as duas soluções é de 0.004%.

## Conclusões

A principal conclusão que se pode retirar através da análise dos resultados determinados para ambos os casos estudados, é o facto de que, devido às soluções obtidas através do modelo numérico serem bastante idênticas às apresentadas pela solução analítica, a solução numérica ser uma alternativa eficaz no cálculo de deslocamentos devido à acção de uma carga de roda estática aplicada numa via com rigidez de fundação constante.

Comparando o primeiro caso de estudo com o segundo, obteve-se um erro menor para um solo de classe *QS1*. No entanto, para ambas as situações o erro obtido é aproximadamente 0%.

### 3.2.2 Comboio de cargas sem variação de rigidez

Através da realização desta secção, pretendeu-se simular um comboio de cargas, o mesmo que foi exposto para a solução analítica e cujos resultados se apresentam na secção 3.1.3, através de um modelo numérico. Deste modo, e a partir de uma análise visual onde se apresentam as deformadas obtidas para ambos os casos, realizou-se uma comparação entre os resultados obtidos para as duas soluções.

Uma importante observação que se apurou, conforme se poderá ver nos resultados que serão exibidos mais a frente, foi o facto do comprimento do modelo numérico obtido na secção 3.2 não poder ser o mesmo para um comboio de cargas. Isto porque, aplicando o mesmo comprimento de via ferroviária para o presente estudo, verificou-se que nas extremidades da via as condições de fronteira da solução numérica não correspondem às da solução analítica.

Na Figura 3.23 apresentam-se dois resultados obtidos para um comboio de cargas, aplicado num modelo numérico com comprimento de  $16.8m$ , assente sobre vias com características distintas.

Em ambas as Figuras traduzem-se as deformadas obtidas para uma via constituída por um carril *UIC* – 60 sujeitas a uma carga de roda de  $80kN$ . A Figura 3.23a refere-se a um solo de classe *QS1*, enquanto a Figura 3.23b diz respeito a um solo de classe *QS3*.

Conforme se apura através da visualização desta Figura, essencialmente para um solo de classe *QS1*, características moles, os resultados apresentados por ambas as soluções, analítica e numérica, não são coincidentes para todo o comprimento da via, nomeadamente onde as cargas de roda estão aplicadas e nas extremidades da viga.

Para um solo de classe *QS3*, Figura 3.23b, os resultados já estão mais próximos um do outro, no entanto, novamente nas extremidades da via, observou-se uma discrepância nas linhas representativas das deformadas.

Tal como referido, isto deve-se ao facto de para um comboio de cargas o comprimento do modelo numérico ter que ser maior do que o determinado para uma carga concentrada estática aplicada na origem do referencial, ou seja, em  $x = 0m$ . Deste modo, para a solução apresentada na Figura anterior, as soluções analíticas e numéricas não apresentam resultados semelhantes porque o comprimento de influência da deformada para as quatro cargas de roda é muito superior ao verificado para uma só carga, não satisfazendo, neste caso, as condições



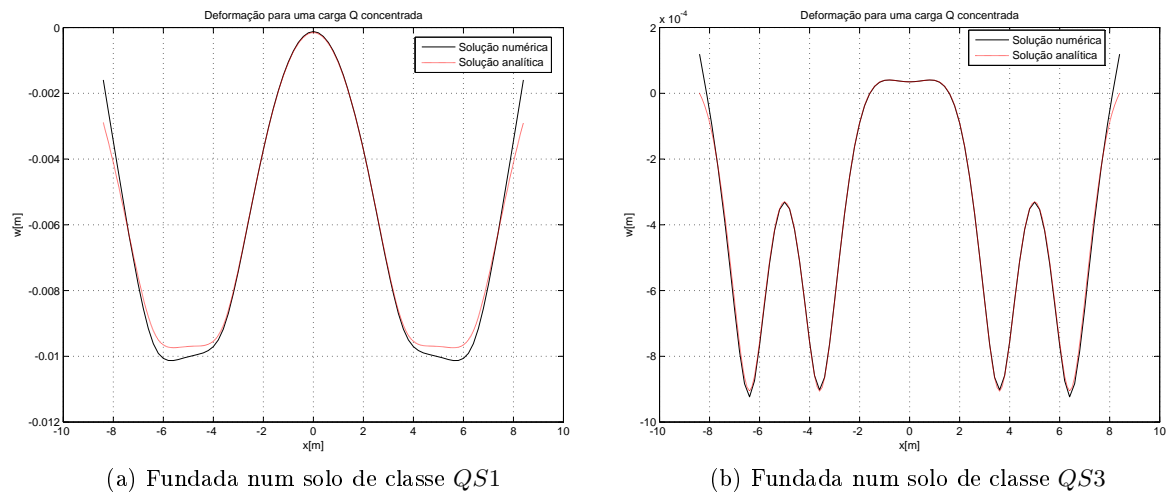


Figura 3.23: Resultados obtidos em diferentes vias ferroviárias para um modelo numérico com comprimento de  $16.8m$

de fronteira da solução analítica.

Tendo em consideração tudo o que foi dito anteriormente, os resultados que se apresentam nesta secção foram obtidos para um comprimento de via ferroviária de  $24m$ . Este modelo é assim constituído por 120 elementos e, consequentemente, 41 travessas.

### Apresentação de resultados

Mais uma vez, organizaram-se os resultados apresentados em dois casos de estudo, de acordo com a classe de solo em que a via ferroviária está fundada. Assim, o primeiro caso é relativo a um solo rijo, de classe *QS3*, e o segundo referente a um solo mole, de classe *QS1*.

Para cada caso de estudo, apresentam-se duas Figuras que representam as deformadas obtidas para diferentes características de vias.

A Figura 3.24 apresenta o modelo de cálculo utilizado, em concordância com o que foi mencionado anteriormente, para a correcta determinação dos resultados pretendidos.

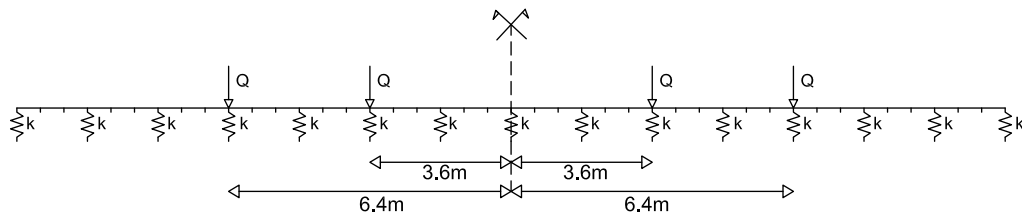


Figura 3.24: Modelo de cálculo utilizado para simular um comboio de cargas

### Primeiro caso de estudo

As Figuras 3.25 e 3.26 apresentam, respectivamente, as deformadas obtidas para uma via ferroviária constituída por um carril *UIC – 54* e *UIC – 60*, ambas sujeitas a acção de uma

carga de roda de  $80kN$ .

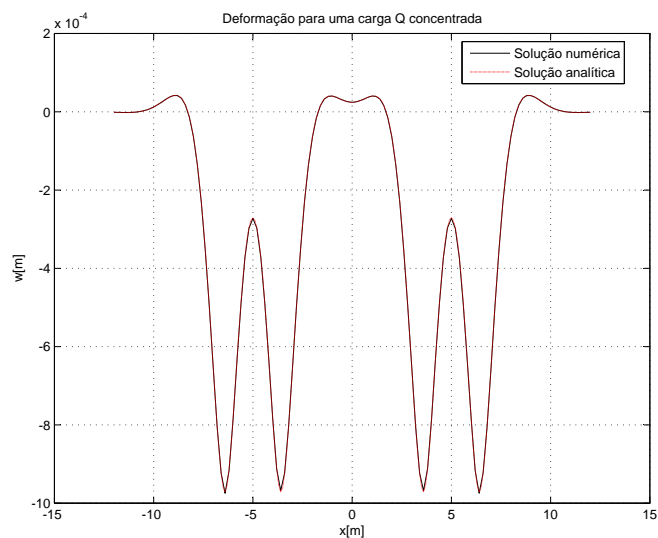


Figura 3.25: Comboio de cargas - Via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 54 sujeita a uma carga de  $80kN$

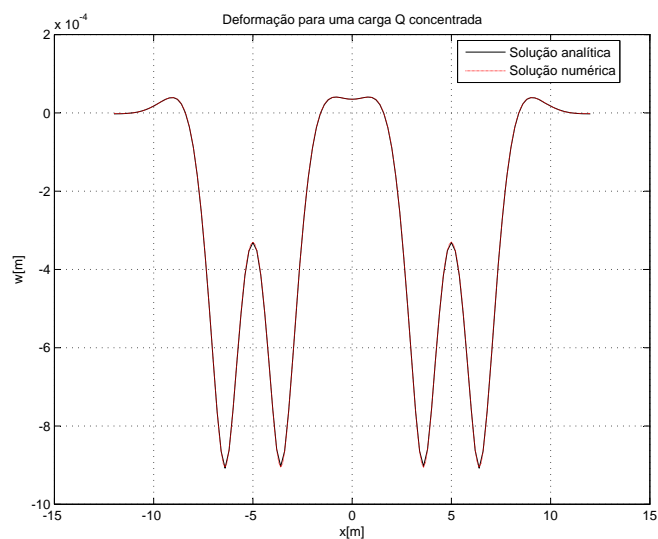


Figura 3.26: Comboio de cargas - Via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 60 sujeita a uma carga de  $80kN$

Conforme se verifica nas referidas Figuras, estas possibilitam concluir que o modelo numérico utilizado permite obter uma solução muito semelhante à determinada através da solução analítica pois, para todo o comprimento da via os resultados apresentados são semelhantes, verificando-se o contrário do ocorrido para a Figura 3.23b, referente ao solo rijo.

Desta forma, é correcto afirmar que o comprimento do modelo numérico utilizado para este primeiro caso de estudo satisfaz as condições de fronteira referidas inicialmente.

### Segundo caso de estudo

Os resultados obtidos para o segundo caso de estudo, referente a um solo com características moles, classe *QS1*, são demonstrados através das Figuras 3.27 e 3.28.

A primeira simula uma via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 60 sujeita a uma carga de roda de  $80kN$ , enquanto a segunda Figura apresenta as deformadas obtidas para o mesmo carril, mas para uma carga aplicada de  $100kN$ .

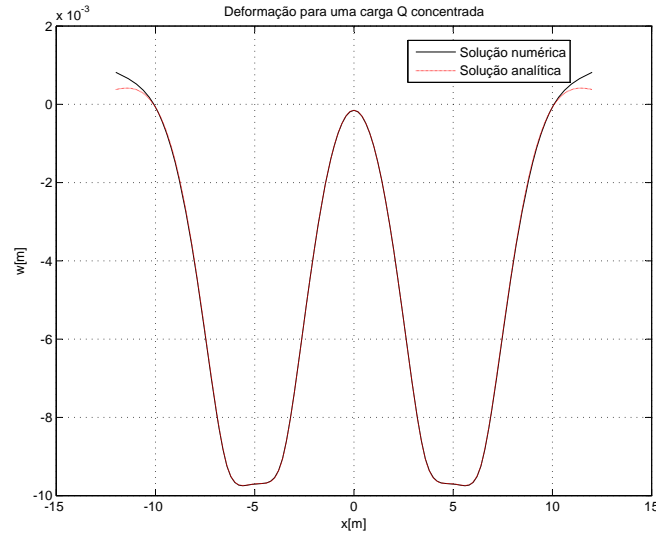


Figura 3.27: Comboio de cargas - Via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 60 sujeita a uma carga de  $80kN$

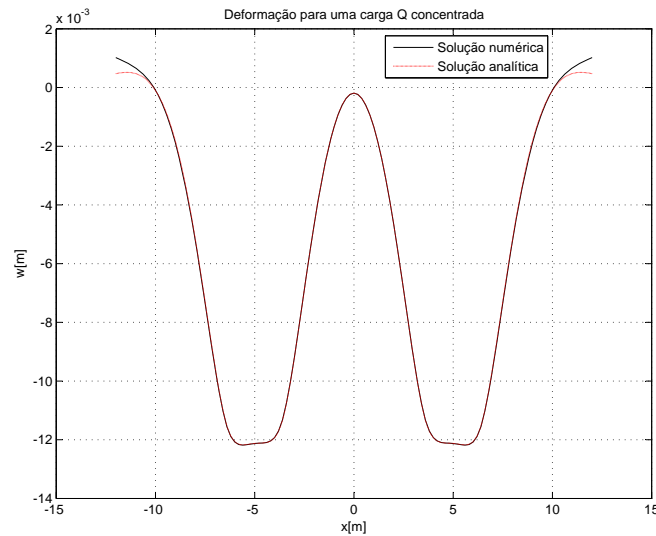


Figura 3.28: Comboio de cargas - Via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 60 sujeita a uma carga de  $100kN$

Através da visualização das Figuras mencionadas, apura-se, tal como demonstrado através da Figura 3.23a, que o comprimento do modelo numérico utilizado para um solo mole, ou seja, de classe *QS1* não é suficientemente extenso para satisfazer as condições de fronteira

nas extremidades da viga pois, apenas neste local, se verifica que os resultados apresentados tanto pela solução numérica como pela solução analítica não são coincidentes.

No entanto, para o restante comprimento da via ambas as soluções apresentam resultados muito semelhantes.

## Conclusões

A principal conclusão que se pode retirar desta secção, tal como para a determinação de deslocamentos devido a uma carga estática concentrada aplicada numa via com rigidez de fundação constante, realizada em 3.2.1, é o facto do modelo numérico ser uma boa alternativa à solução analítica.

No entanto, tal como se fez referência inicialmente, é preciso ter atenção ao comprimento do modelo numérico adoptado, pois é extremamente importante que as condições de fronteira desta solução sejam iguais às da solução analítica, conforme se verificou na influência dos resultados obtidos para a presente secção.

Em relação aos resultados apresentados nos dois casos de estudo, conclui-se que o comprimento do modelo numérico,  $24m$ , definido para simular a via ferroviária é correcto para um solo de classe  $QS3$  - primeiro caso de estudo. Já para o segundo, verificou-se uma diferença significativa no valor das deformações para as extremidades da viga pelo que, dever-se-ia aumentar um pouco o comprimento do modelo para esta classe de solo, por forma a obter resultados mais aproximados neste local.

### 3.2.3 Carga concentrada com variação de rigidez

O principal objectivo desta secção, baseia-se na simulação de uma via ferroviária sujeita a acção de uma carga de roda estática assente sobre diferentes tipos de solo de fundação, ou seja, casos em que a rigidez do solo de fundação é variável.

Deste modo, a via ferroviária, que tal como foi anteriormente demonstrado apresenta um comprimento de  $16.8m$ , está assente sobre diferentes tipos de solo em que a sua rigidez está de acordo com os valores definidos na Tabela 3.3.

Como a análise realizada é referente a um problema estático, as deformadas obtidas e que se apresentam nas respectivas Figuras foram determinadas com as cargas de roda colocadas sobre todas as travessas.

Na apresentação dos resultados referentes a este estudo, e ao contrário do que se sucedeu para os restantes efectuados nesta Dissertação, estes não serão exibidos em dois casos de estudo. Assim, apresentam-se apenas duas Figuras onde, em cada uma delas, se representam as deformadas obtidas para duas situações distintas, nomeadamente um caso em que ocorre uma variação brusca de rigidez e outro em que esta variação se realiza de uma forma gradual.

### Apresentação de resultados

De acordo com o acima referido, serão apresentadas duas Figuras com diferentes soluções adoptadas. Uma diz respeito a um caso em que a variação de rigidez é efectuada de uma forma brusca, ou seja, o solo onde a via ferroviária está fundada passa directamente de um solo de classe *QS1* para um solo de classe *QS3* e, a segunda, em que existe entre estes dois, um solo com características medianas.

As Figuras 3.29, 3.30 e 3.31 exibem, respectivamente, os modelos de cálculo utilizados para determinação dos resultados.

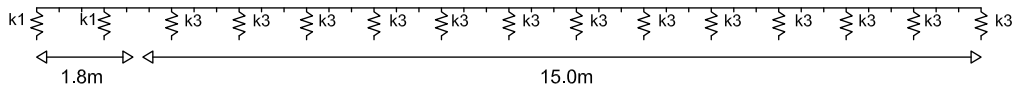


Figura 3.29: Modelo adoptado para determinação de deformações - Variação brusca de rigidez *I*

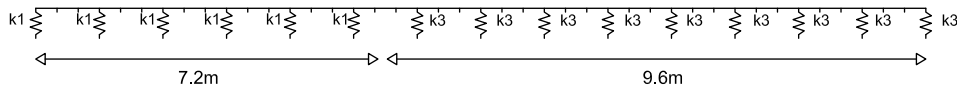


Figura 3.30: Modelo adoptado para determinação de deformações - Variação brusca de rigidez *II*

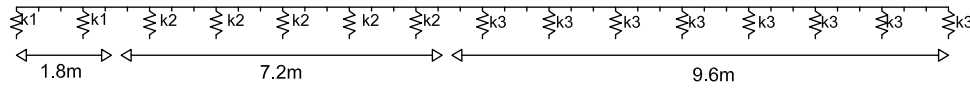


Figura 3.31: Modelo adoptado para determinação de deformações - Aumento gradual de rigidez

Conforme se visualiza nas Figuras anteriores, definiram-se duas situações distintas para o caso de variação brusca de rigidez. O que difere entre estes dois modelos de cálculo é, unicamente, o comprimento de solo mole e rijo sobre a qual a via ferroviária está assente.

Assim, para o primeiro modelo, Figura 3.29, esta localiza-se sobre um solo de classe *QS1* ao longo de um comprimento de  $1.8m$ , sendo que, a restante via,  $15.0m$ , está sobre solo de classe *QS3*. Para a segunda situação, representada através da Figura 3.30, o solo de classe *QS1* estende-se por um comprimento de  $7.2m$  e o solo rijo por  $9.6m$ .

Já para a solução de aumento gradual de rigidez, é possível encontrar entre estes dois tipos de solo um com características medianas, *QS2*, por forma a criar uma zona de transição entre eles e, consequentemente, não ocorrer uma alteração drástica na rigidez de fundação.

Então, em relação ao modelo reportado através da Figura 3.31, a via está assente sobre  $1.8m$  de solo mole,  $7.2m$  de solo com características medianas e  $9.6m$  sobre um solo rijo.

Todos os resultados obtidos e que são aqui apresentados, são referentes a uma via ferroviária constituída por um carril *UIC – 60* sujeitas a uma carga de roda de  $80kN$ .

Na Figura 3.32, exibem-se as deformadas obtidas para os modelos de cálculo representados através das Figuras 3.30 e 3.31.

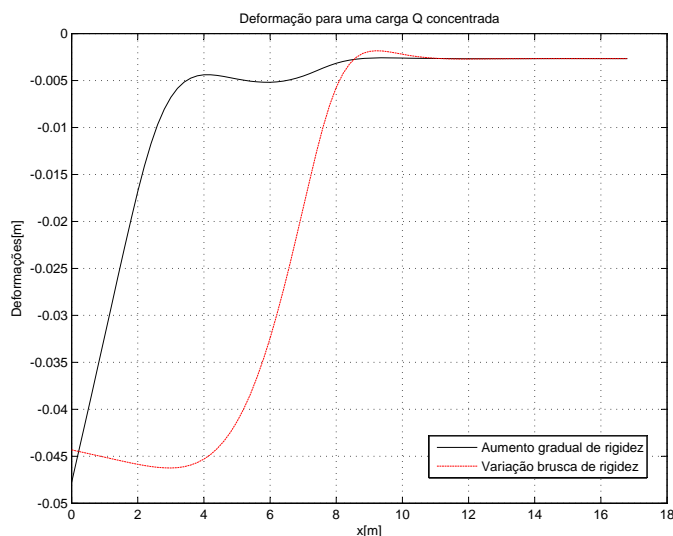


Figura 3.32: Deformações para as duas situações. Para variação brusca de rigidez o solo mole tem  $7.2m$  de comprimento

Conforme se visualiza na referida Figura, a deformada representativa de variação brusca de rigidez apresenta valores de deslocamentos, praticamente em todo o comprimento da via ferroviária, superiores aos que se verificam para a solução de aumento gradual de rigidez. Para além disto, nesta última situação verifica-se, também, que o valor dos deslocamentos são quase nulos num valor de  $x$  mais perto da origem, ou seja, de  $x = 0m$ .

No entanto, sensivelmente a partir de  $x = 11m$  e até ao final da via, estes valores tornam-se coincidentes para ambos os modelos de cálculo.

A Figura 3.33 apresenta as soluções obtidas para os modelos de cálculo representados através das Figuras 3.29 e 3.31.

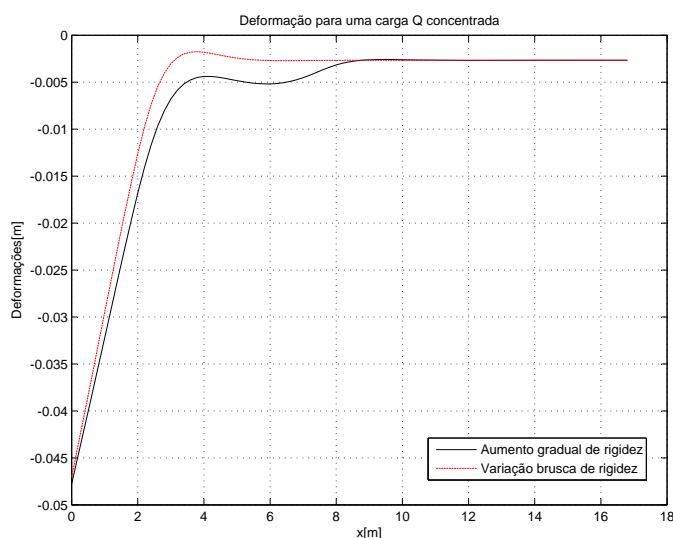


Figura 3.33: Deformações para as duas situações. Para a variação brusca de rigidez o solo mole tem  $1.8m$  de comprimento

Conforme se visualiza para esta situação, é possível analisar que ambas as deformadas apresentam valores de deslocamentos semelhantes, conforme se verifica pelo andamento das linhas que a caracterizam. No entanto, para a solução de variação brusca de rigidez, para além de apresentar deslocamentos próximas de nulas num valor de  $x$  mais perto da origem, mostra, também, menores deslocamentos que a outra solução. Isto deve-se, ao facto de o comprimento de solo de classe *QS1* ser muito pequeno quando comparado com o comprimento de solo de classe *QS3*.

## Conclusões

De uma análise efectuada aos resultados obtidos e apresentados nesta secção, conclui-se que uma solução de aumento gradual de rigidez, ou seja, em que existe uma zona de transição entre o solo de classe *QS1* e de classe *QS3*, apresenta resultados de acordo com o que se pretende para uma determinada via ferroviária, quando o comprimento de solo mole é relativamente extenso.

Ao contrário, e em concordância com o referido na análise da Figura 3.33, caso o comprimento deste tipo de solo seja muito pequeno quando comparado com o de solo rijo, talvez não se justifique efectuar uma zona de transição constituída por um solo com características medianas, pois os resultados apresentados para a solução de aumento gradual de rigidez não são tão satisfatórios, como se verifica para a solução representada pela Figura 3.32.

Foi realizado, também, o mesmo processo anterior para uma carga de  $80kN$  e os mesmos valores de rigidez de fundação, mas para um carril *UIC* – 54. No entanto, os resultados obtidos são idênticos aos apresentados através das Figuras 3.32 e 3.33.

### 3.2.4 Força transmitida às travessas

Nesta secção, elaborou-se um estudo sobre as forças transmitidas às diferentes travessas que constituem uma determinada via ferroviária.

O processo realizado nesta análise, consistiu, inicialmente, em determinar os esforços exercidos por estes elementos através dos dois métodos já desenvolvidos na presente Dissertação, nomeadamente o cálculo analítico e o cálculo numérico. Assim, foi possível efectuar uma comparação entre os resultados obtidos através destas duas soluções.

Esta análise foi realizada para diferentes condições de vias ferroviárias, isto é, diferentes cargas de roda, diferentes tipos de carris e diferentes solos de fundação.

Para obtenção dos cálculos pretendidos, recorreu-se ao mesmo modelo utilizado para determinação dos deslocamentos para uma carga concentrada aplicada numa via sem variação de rigidez. A Figura 3.34, apresenta o mesmo modelo utilizado com a numeração das respectivas travessas.

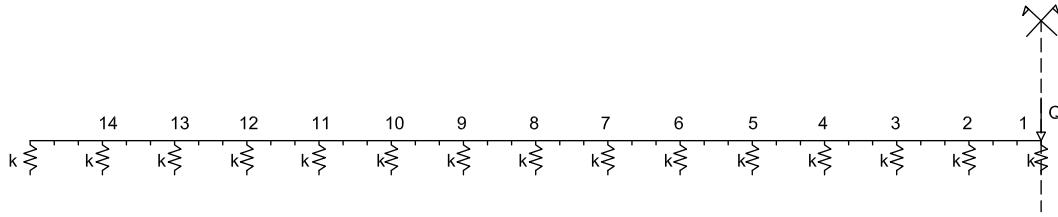


Figura 3.34: Modelo de cálculo utilizado para obtenção dos esforços transmitidos às travessas

Em conformidade com a Figura 3.34, os esforços transmitidos às travessas foram obtidos com a carga aplicada na travessa 1, ou seja, na origem do referencial, e com rigidez de fundação constante.

Os resultados determinados através deste modelo numérico, foram alcançados de uma forma muito simples e directa. Basicamente, o cálculo consistiu na aplicação de uma carga de roda, de valor constante, na origem e verificou-se quais os deslocamentos ocorridos para cada uma das travessas, de 1 a 14.

De acordo com a expressão 3.32, o esforço transmitido a cada um destes elementos, resultou da multiplicação entre o valor desse deslocamento  $w$  determinado e a rigidez da mola, apresentada na Tabela 3.3, da respectiva travessa.

$$F_{trav}^i = k \times w \quad (3.32)$$

Em relação aos resultados obtidos através solução analítica, multiplicou-se o valor do módulo da via pela respectiva área de influência de cada travessa, conforme a expressão 3.33 demonstra.

Isto deve-se ao facto de que, para esta análise, ter-se utilizado o parâmetro módulo da via para caracterizar a resistência vertical da mesma que, como se sabe, vem definido por secção de área.

$$F_{trav}^i = u \times \int_{x_i}^{x_f} w(x) \quad (3.33)$$

O integral de  $w(x)$ , expressão 3.1 definida para o cálculo estático, permite determinar o comprimento de influência num determinado intervalo de  $x_i$  a  $x_f$ . Se o espaçamento entre travessas for  $0.6m$ , o valor de  $x_i$  e  $x_f$  para determinação da força transmitida à travessa 1 será, respectivamente,  $-0.3$  e  $0.3$ .

### **Apresentação de resultados**

Conforme referido no início da secção, os esforços exercidos pelas travessas foram calculados através de duas soluções já desenvolvidas nesta Dissertação: a solução analítica e a solução numérica. Assim, verificou-se a diferença entre os resultados obtidos por ambas as soluções.



Também para esta análise, e tal como se realizou para os casos anteriormente estudados, os cálculos determinados foram separados em dois casos de estudo, sendo que, cada um deles é constituído por duas situações distintas de vias ferroviárias.

Deste modo, o primeiro caso corresponde a um solo de classe *QS3*, enquanto o segundo diz respeito a um solo de classe *QS1*, de acordo com a classificação realizada na secção 2.3.

Em cada uma das situações presentes nos diferentes casos de estudo, exibe-se uma Tabela com os resultados determinados através das duas análises, bem como a respectiva diferença absoluta, em  $kN$ , existente entre ambas as soluções.

Este cálculo foi realizado de acordo com a expressão 3.34.

$$Diferença[kN] = |F_{trav}^i(Sol.Analítica) - F_{trav}^i(Sol.Numérica)| \quad (3.34)$$

Seguidamente, e para finalizar, demonstram-se os resultados apresentados na Tabela anterior numa Figura, de modo a analisar, de uma forma mais perceptível, a diferença entre ambas as metodologias de cálculo.

### Primeiro caso de estudo

Neste primeiro caso analisaram-se os esforços transmitidos às travessas, para vias ferroviárias constituídas pelos diferentes tipos de carris apresentados na Tabela 2.6, respectivamente *UIC – 54* e *UIC – 60*, sujeitas a acção de uma carga de roda de  $80kN$ .

Assim, a Tabela 3.6 e a Figura 3.35 apresentam os resultados obtidos para o carril *UIC – 54*, enquanto a Tabela 3.7 e a Figura 3.36 referem-se aos resultados obtidos para o carril *UIC – 60*.

Seguidamente, a Figura 3.35 apresenta de uma forma gráfica, os resultados determinados e apresentados na Tabela 3.6.

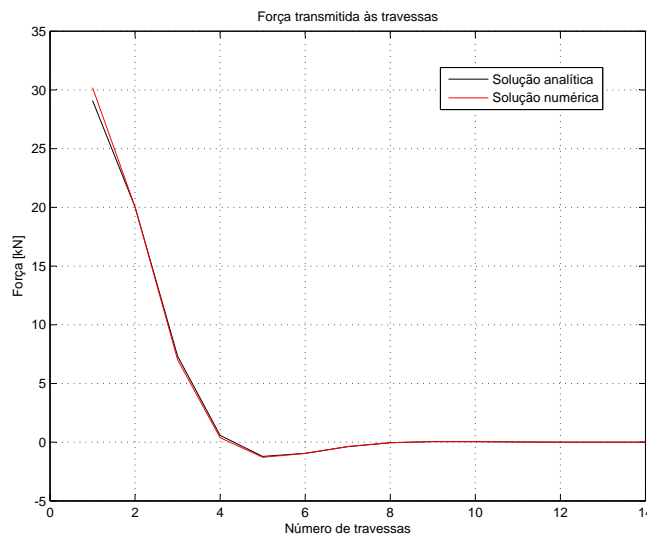


Figura 3.35: Comparação dos resultados obtidos para ambas as soluções - Carga de  $80kN$  aplicada num carril *UIC – 54*

Tabela 3.6: Força transmitida a cada travessa - Carga de  $80kN$  aplicada num carril *UIC* – 54

Travessa	Força [ $kN$ ] (Sol. analítica)	Força [ $kN$ ] (Sol. numérica)	Diferença [ $kN$ ]
1	-29.10	-30.20	1.10
2	-20.04	-20.04	0.01
3	-7.32	-7.02	0.30
4	-0.58	-0.38	0.20
5	1.21	1.29	0.08
6	0.95	0.96	0.01
7	0.38	0.37	0.01
8	0.05	0.04	0.01
9	-0.05	-0.05	0.00
10	-0.04	-0.05	0.01
11	-0.02	-0.02	0.00
12	0.00	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00
14	0.00	0.00	0.00

Conforme se visualiza na Figura 3.35 e na Tabela 3.6, as soluções obtidas para ambos os métodos são bastante semelhantes em todas as travessas. A maior diferença ocorre para a travessa 1, sendo a diferença entre estas duas soluções superior a  $1kN$ , precisamente  $1.10kN$ .

Salienta-se que, da travessa 6 em diante o valor desta diferença é praticamente, ou mesmo, nula.

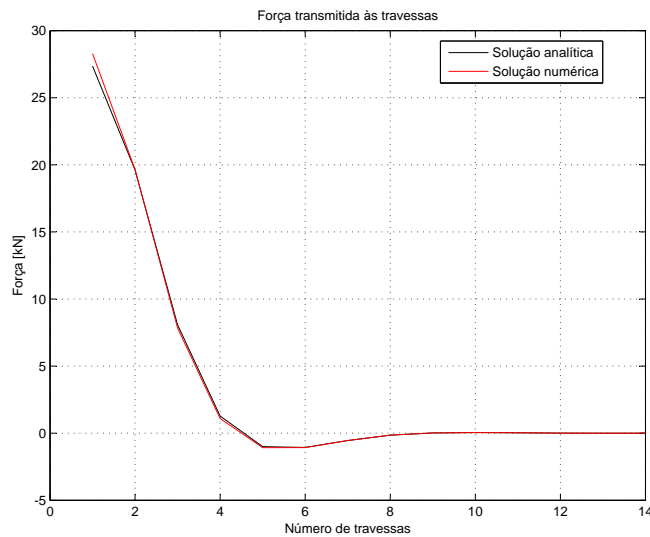
O valor médio das diferenças apresentadas na Tabela 3.6 é aproximadamente  $0.12kN$ .

Conclui-se assim, pelos resultados apresentados na Figura e na Tabela referentes a uma carga de  $80kN$  aplicada num carril *UIC* – 54, o que fora afirmado anteriormente, ou seja, que os resultados obtidos através do modelo numérico são bastante semelhantes aos determinados pela solução analítica.

Finalmente, para concluir o primeiro caso de estudo, a Tabela 3.7 e a Figura 3.36 apresentam os esforços exercidos por cada travessa para uma via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 60 e sujeita a uma carga de roda de  $80kN$ .

Tabela 3.7: Força transmitida a cada travessa - Carga de  $80kN$  aplicada num carril *UIC* – 60

Travessa	Força [ $kN$ ] (Sol. analítica)	Força [ $kN$ ] (Sol. numérica)	Diferença [ $kN$ ]
1	-27.36	-28.29	0.93
2	-19.61	-19.65	0.04
3	-8.07	-7.83	0.24
4	-1.28	-1.09	0.19
5	1.00	1.08	0.08
6	1.06	1.07	0.01
7	0.55	0.54	0.01
8	0.15	0.14	0.01
9	-0.02	-0.02	0.01
10	-0.05	-0.05	0.00
11	-0.03	-0.03	0.00
12	-0.01	-0.01	0.00
13	0.00	0.00	0.00
14	0.00	0.00	0.00

Figura 3.36: Comparação dos resultados obtidos para ambas as soluções - Carga de  $80kN$  aplicada num carril *UIC* – 60

Mais uma vez, conforme se observa na Tabela 3.7, na Figura 3.36 e na situação estudada anteriormente, os resultados apresentados por ambas as soluções são muito próximas. Também nesta último caso estudado, o valor da diferença para a primeira travessa é aproximadamente  $1kN$ , precisamente  $0.93kN$ . Em relação ao valor médio da diferença, este é aproximadamente  $0.11kN$  para este caso.

Similarmente aos resultados da Tabela 3.6, da travessa 6 em diante a diferença verificada entre as duas soluções é praticamente nula.

### Segundo caso de estudo

Relativamente ao segundo caso de estudo, denominado assim para as vias ferroviárias fundadas em solos de características moles, a Tabela 3.8 e a Figura 3.37, apresentam os resultados obtidos para uma via constituída por um carril do tipo *UIC* – 60 e sujeita a uma carga de  $80kN$ . Já a Tabela 3.9 e a Figura 3.38 referem-se a uma via, também ela constituída por um carril *UIC* – 60, à qual está aplicada uma carga de roda de  $100kN$ .

A Tabela 3.8 exhibe, assim, os valores determinados para a situação reportada através da Figura 3.37.

Tabela 3.8: Força transmitida a cada travessa - Carga de  $80kN$  aplicada num carril *UIC* – 60

Travessa	Força [ $kN$ ] (Sol. analítica)	Força [ $kN$ ] (Sol. numérica)	Diferença [ $kN$ ]
1	-13.90	-14.03	0.13
2	-12.61	-12.68	0.07
3	-9.80	-9.80	0.00
4	-6.70	-6.68	0.02
5	-4.00	-3.97	0.03
6	-1.97	-1.94	0.03
7	-0.62	-0.59	0.03
8	0.15	0.18	0.03
9	0.51	0.54	0.03
10	0.60	0.63	0.03
11	0.54	0.57	0.03
12	0.42	0.43	0.01
13	0.28	0.27	0.01
14	0.17	0.11	0.06

Conforme se verifica, mais uma vez, os resultados obtidos através das duas metodologias de cálculo, para um solo de características moles, também são muito semelhantes. A maior diferença ocorre na primeira travessa e corresponde a  $0.13kN$ .

Para este caso, o valor médio de diferença é de  $0.04kN$ .

Na Tabela 3.9 apresentam-se os resultados determinados, através das duas soluções, referentes a uma via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 60 sujeita a uma carga de roda

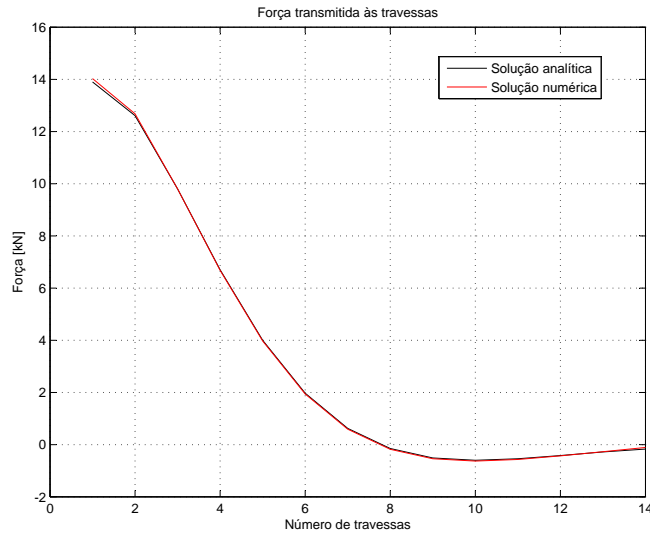


Figura 3.37: Comparação dos resultados obtidos para ambas as soluções - Carga de  $80kN$  aplicada num carril  $UIC - 60$

de  $100kN$ . A Figura 3.38, exibe estes resultados de uma forma gráfica.

Tabela 3.9: Força transmitida a cada travessa - Carga de  $100kN$  aplicada num carril  $UIC - 60$

Travessa	Força [kN] (Sol. analítica)	Força [kN] (Sol. numérica)	Diferença [kN]
1	-17.38	-17.54	0.16
2	-15.77	-15.84	0.07
3	-12.24	-12.26	0.02
4	-8.38	-8.35	0.03
5	-5.01	-4.97	0.04
6	-2.47	-2.42	0.05
7	-0.78	-0.74	0.04
8	0.19	0.23	0.04
9	0.64	0.68	0.04
10	0.75	0.79	0.04
11	0.68	0.71	0.03
12	0.52	0.54	0.02
13	0.35	0.34	0.01
14	0.21	0.14	0.07

Visualiza-se, novamente, que os resultados apresentados por ambas as soluções são muito próximos. A maior diferença ocorre, tal como sucedeu para os casos anteriormente estudados, para a primeira travessa -  $0.16kN$ .

Em relação ao valor médio de diferenças, para este caso é  $0.05kN$ .

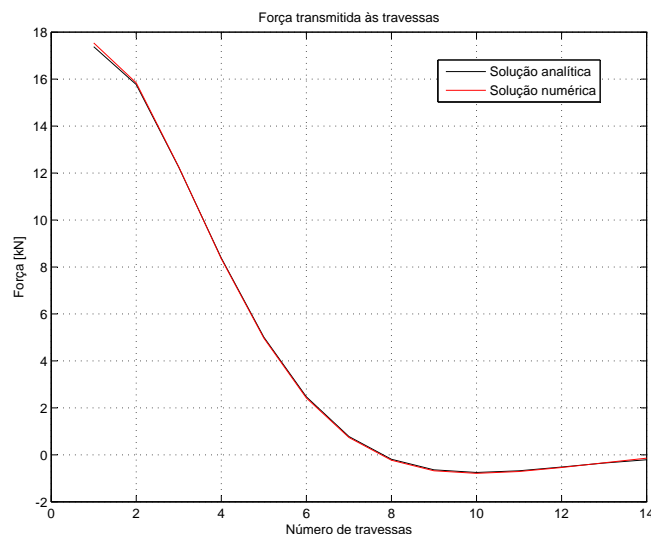


Figura 3.38: Comparação dos resultados obtidos para ambas as soluções - Carga de  $100kN$  aplicada num carril *UIC* – 60

## Conclusões

Através do estudo efectuado na secção 3.2.4, e de acordo com os resultados anteriormente apresentados, é possível retirar enumeras conclusões.

Assim, e para o primeiro caso de estudo, a força transmitida à primeira travessa, ou seja, a que está localizada por baixo do ponto de aplicação da carga de roda, é maior para um carril *UIC* – 54 do que para um carril *UIC* – 60. Isto, para casos em que o solo de fundação e o valor da carga aplicada são os mesmos.

Para o segundo caso de estudo, onde diferentes cargas de roda actuam no mesmo tipo de carril, os esforços obtidos para a travessa localizada por baixo do ponto de aplicação da carga é maior quanto maior for o valor dessa mesma carga aplicada, conforme já era esperado.

Por fim, analisando situações em que a mesma carga de roda está aplicada no mesmo tipo de carril, mas fundada em diferentes solos de fundação, situação reportada através das Tabelas 3.7 e 3.8, o esforço transmitido à travessa 1 é maior para um solo rijo, pelo que, se conclui que para um solo mole os esforços são distribuídos por um maior número de travessas.

Deste modo, a principal e mais importante conclusão é o facto de para uma via fundada em solos de classe *QS1* e constituída por um carril *UIC* – 60, os esforços distribuem-se por um maior número de travessas, ao contrário do que se verifica para um solo de classe *QS3* e para um carril *UIC* – 54. Tal pode ser verificado, respectivamente, através das Tabelas 3.8 e 3.9, onde não existem travessas com esforços nulos ao contrário do que se visualiza nas Tabelas 3.6 e 3.7, e através das Tabelas 3.6 e 3.7.

Consequentemente, o facto de que para um solo mole e para um carril *UIC* – 60 os esforços se distribuírem por um maior número de travessas, leva a que cada travessa receba esforços de menor valor.

### 3.2.5 Influência do espaçamento das travessas

Para finalizar o cálculo de esforços devido à acção de cargas de roda estáticas, realizou-se na presente secção uma análise sobre a influência que o espaçamento das travessas pode apresentar, no que diz respeito à transmissão de cargas para estes elementos.

Assim, determinou-se o esforço exercido pela travessa localizada por baixo do local onde a carga está aplicada, travessa 1, para vários espaçamentos-padrão definidos, nomeadamente de  $0.50m$ ,  $0.60m$  e  $0.70m$ . Deste modo, com os esforços determinados para estas três situações, efectuou-se uma análise baseada nos diferentes resultados obtidos, compreendendo qual a influência que o espaçamento entre travessas pode provocar.

Definiu-se, uma vez mais, dois casos de estudo, por forma a organizar de uma forma correcta os resultados obtidos.

### Apresentação de resultados

A estruturação dos resultados apresentados nesta secção, bem como as situações estudadas para cada caso de estudo, é análoga à secção anterior, 3.2.4.

Desta forma, no primeiro caso de estudo, referente a um solo de classe  $QS3$ , analisaram-se os resultados obtidos para uma via ferroviária constituída por carris do tipo  $UIC - 54$  e  $UIC - 60$ . Ambas sujeitas a uma carga de  $80kN$ . Em relação ao segundo caso estudado, denominado assim para um solo de classe  $QS1$ , a análise efectuada diz respeito a uma via constituída por um carril  $UIC - 60$  sujeitas a cargas de roda de  $80kN$  e, posteriormente, de  $100kN$ .

Os resultados expostos encontram-se em Tabelas onde se exhibe o valor da transmissibilidade, determinada de acordo com a expressão 3.35, para a primeira travessa, ou seja, para a travessa localizada por baixo do ponto de aplicação da carga de roda.

$$Transmissibilidade[\%] = \frac{F_{Trav}^i}{Q} \times 100 \quad (3.35)$$

Onde  $F_{Trav}^i$  corresponde à força que é transmitida à travessa  $i$ , que neste caso corresponde a travessa 1.

Por último, salienta-se que os resultados apresentados nas diversas Tabelas dizem somente respeito à solução analítica, considerada exacta, pois conforme se concluiu para a secção 3.2.4, os valores obtidos tanto pela solução analítica como pela solução numérica são muito próximos.

### Primeiro caso de estudo

Conforme referido inicialmente, nas Tabelas 3.10 e 3.11 apresentam-se os resultados determinados, respectivamente, para uma via ferroviária constituída por um carril  $UIC - 54$  e  $UIC - 60$ . Ambas estão sujeitas a uma carga de roda no valor de  $80kN$ .

Tabela 3.10: Transmissibilidade da força para a travessa 1 -  $Q = 80kN$ ;  $UIC - 54$ 

<b>Travessa</b>	$d = 0.5m$	$d = 0.6m$	$d = 0.7m$
1	30.66	36.37	41.88

Tabela 3.11: Transmissibilidade da força para a travessa 1 -  $Q = 80kN$ ;  $UIC - 60$ 

<b>Travessa</b>	$d = 0.5m$	$d = 0.6m$	$d = 0.7m$
1	28.80	34.20	39.44

Analisando-se as duas Tabelas apresentadas, 3.10 e 3.11, conclui-se que o valor da transmissibilidade da força para a travessa 1, é maior quanto maior for o valor do espaçamento entre estes elementos, quer isto dizer que a força transmitida a esta travessa aumenta com o respectivo aumento do espaçamento entre estes elementos.

Assim, é correcto afirmar que quanto menor o espaçamento maior o número de travessas que recebem esforços, logo maior a distribuição de esforços.

Comparando as duas situações reportadas nas referidas Tabelas, verifica-se que a transmissibilidade de forças são superiores para um carril do tipo  $UIC - 54$ , qualquer que seja o valor do espaçamento entre travessas, pois este carril apresenta um menor valor de rigidez de flexão.

Conclui-se então, que para um carril  $UIC - 60$  é maior a distribuição de esforços, ou seja, estes são divididos por um maior número de travessas.

Estas conclusões estão de acordo com as retiradas na secção anterior para o primeiro caso de estudo, na qual se determinaram os esforços transmitidos às diversas travessas constituintes do modelo de cálculo.

### Segundo caso de estudo

Finalmente, no segundo caso de estudo apresentam-se nas Tabelas 3.12 e 3.13 as situações estudadas referentes a um solo de classe  $QS1$ , nomeadamente uma via constituída por um carril  $UIC - 60$  sujeita a uma carga de  $80kN$  e uma carga de  $100kN$  aplicada no mesmo tipo de carril, respectivamente.

Tabela 3.12: Transmissibilidade da força para a travessa 1 -  $Q = 80kN$ ;  $UIC - 60$ 

<b>Travessa</b>	$d = 0.5m$	$d = 0.6m$	$d = 0.7m$
1	14.52	17.38	20.21



Tabela 3.13: Transmissibilidade da força para a travessa 1 -  $Q = 100kN$ ;  $UIC - 60$ 

Travessa	$d = 0.5m$	$d = 0.6m$	$d = 0.7m$
1	14.52	17.38	20.21

Observou-se, mais uma vez, que o valor da transmissibilidade da força para a primeira travessa é maior quanto maior for o espaçamento entre travessas.

Contrariamente ao sucedido para o primeiro caso de estudo, os valores obtidos de transmissibilidade são iguais para todos os espaçamentos, independentemente do valor da carga de roda aumentar.

## Conclusões

Comparado as diversas situações estudadas, verificou-se, para o primeiro caso de estudo, Tabelas 3.10 e 3.11, que o valor da transmissibilidade de esforços é maior para um carril do tipo  $UIC - 54$ . Deste modo, para um carril  $UIC - 60$  é maior o número de travessas que recebem os mesmos.

Em relação ao segundo caso, cujos resultados se apresentam nas Tabelas 3.12 e 3.13, verificou-se que o facto da carga de roda aumentar não faz com que o valor de transmissibilidade também aumente. Isto porque, através das referidas Tabelas, visualiza-se que os valores obtidos são sempre iguais, independentemente do valor do espaçamento.

Finalmente, para uma análise efectuada entre o primeiro caso de estudo e o segundo, nomeadamente para uma situação em que a mesma carga de roda,  $80kN$ , está aplicada ao mesmo perfil de carril,  $UIC - 60$ , que, por sua vez, se encontram fundados em diferentes tipos de solo, resultados exibidos nas Tabelas 3.11 e 3.12, o valor de transmissibilidade é maior para um solo de classe  $QS3$ , independentemente do espaçamento entre as travessas.

Assim, é correcto afirmar que para um solo de características moles é maior a distribuição de esforços, ou seja, maior é o número de travessas que recebem esforços.

Desta forma, as principais conclusões que se podem retirar do estudo elaborado nesta secção, é o facto de que a força transmitida à travessa localizada por baixo do ponto de aplicação da carga de roda, ou seja, à travessa 1, é maior quanto maior for o espaçamento entre estes elementos e que, quanto menor a distância entre os mesmos maior o número de travessas que recebem esforços, logo maior é a distribuição de esforços.

A situação mais aceitável para uma determinada via ferroviária é que exista uma correcta distribuição de esforços e que esta se realize por um maior número de travessas. Assim, é de evitar situações em que a força exercida pela carga de roda  $Q$  se transmita maioritariamente

para a travessa localizada por baixo do ponto de aplicação dessa mesma carga.

## Capítulo 4

# Problema dinâmico

### 4.1 Solução analítica

Para concluir a determinação de esforços através de soluções analíticas, realizou-se nesta secção, a avaliação de deformações provocadas por uma carga de roda  $Q$  constante, que se desloca com uma determinada velocidade  $v$ , tal como a Figura 4.1 ilustra, a actuar sobre uma viga de comprimento infinito com rigidez de fundação constante.

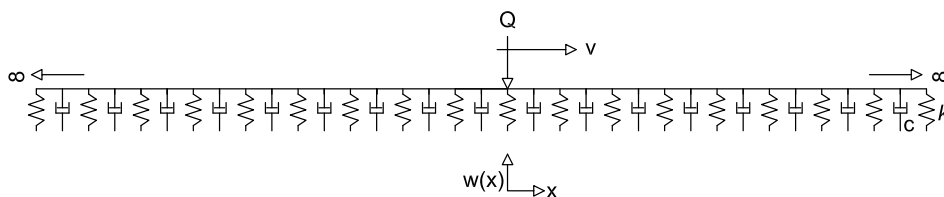


Figura 4.1: Modelo utilizado para uma carga  $Q$  em movimento com velocidade  $v$

Iniciou-se este estudo, com uma breve explicação teórica do processo que possibilita a determinação de deslocamentos provocados por acção de uma carga de roda a circular com velocidade constante.

Deste modo, e de acordo com Fryba (1972), para um correcto procedimento consideram-se os seguintes pressupostos:

1. O comportamento da viga é descrito pela equação diferencial de Euler-Bernoulli;
2. A massa da carga de roda em movimento é pequena quando comparada com a massa da viga, pelo que apenas se consideram os efeitos gravitacionais da carga;
3. A carga desloca-se com uma velocidade constante da esquerda para a direita;
4. O amortecimento da viga é proporcional à velocidade de vibração;
5. O cálculo é realizado para uma viga simplesmente apoiada, ou seja, com deslocamento e momento flector nulo nas extremidades.

A solução analítica da equação geral é bastante complexa. Assim, como alternativa de resolução, é possível considerar a solução numérica da equação, por exemplo, através do método das diferenças finitas, como se demonstrará seguidamente.

Segundo Fryba (1972), a equação diferencial 4.1 rege o comportamento de uma viga, de massa  $m$  e rigidez à flexão  $EI$ , quando sujeita a acção de um carregamento variável,  $q(x, t)$ , ao longo do tempo.

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + kw = q(x, t) \quad (4.1)$$

No entanto, as cargas transmitidas pelo veículo ferroviário à via são consideradas cargas pontuais. Desta forma, o carregamento devido à circulação de uma carga de roda pontual  $Q$  com uma velocidade  $v$  constante, é expressa por:

$$q(x, t) = Q\delta(x - vt) \quad (4.2)$$

Então, a equação diferencial 4.1 pode ser re-escrita do seguinte modo:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + kw = Q\delta(x - vt) \quad (4.3)$$

Onde  $\delta$  é designada por função Delta-Dirac.

De acordo com Mateus da Silva (2005), a equação 4.3 pode ainda ser simplificada, caso se considere um referencial em movimento e que apresente a mesma velocidade da carga  $Q$ . Assim:

$$s = \frac{1}{L}(x - vt) \quad (4.4)$$

Após esta mudança de referencial, a equação 4.3 apresenta-se da seguinte forma:

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + 4\alpha^2 \frac{d^2 w}{ds^2} - 8\alpha\zeta \frac{dw}{ds} + 4w = Q\delta(s) \quad (4.5)$$

Onde  $\alpha$  e  $\zeta$  são ambos factores adimensionais e correspondem à relação entre a velocidade de circulação da carga  $Q$  e a velocidade crítica e à relação entre o amortecimento e o amortecimento crítico, respectivamente. As expressões que permitem obter estes resultados são: 4.6 e 4.8

$$\alpha = \frac{v}{\frac{2}{L}} \times \left( \frac{m}{EI} \right)^{1/2} \quad (4.6)$$

Ou simplesmente:

$$\alpha = \frac{v}{v_{cr}} \quad (4.7)$$

e

$$\zeta = \frac{c}{2m} \times \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.8)$$

Em que  $v$  corresponde à velocidade de circulação da carga e  $c$ , conforme já referido, ao amortecimento da via.

Inserido na expressão 4.5  $w = e^{\gamma s}$  obteve-se a expressão 4.9:

$$\gamma^4 + 4\alpha^2\gamma^2 - 8\alpha\beta\gamma + 4 = 0 \quad (4.9)$$

As quatro raízes calculadas através da resolução desta equação são muito complexas. No entanto, todas elas são importantes, pois ao contrário do problema estático, estas não são simétricas entre si.

Assim, de modo a que se garanta a continuidade dos deslocamentos, o declive da deformada, o equilíbrio de momentos flectores e do esforço transversal, a solução do deslocamento deve ser expressa da seguinte forma:

$$w = \begin{cases} A_1 e^{\gamma_1 s} + A_2 e^{\gamma_2 s} & \text{se } s \geq 0 \\ A_3 e^{\gamma_3 s} + A_4 e^{\gamma_4 s} & \text{se } s < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Os parâmetros  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$  são determinados impondo as condições de continuidade, descritas através das expressões 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14, referidas anteriormente no ponto central, ou seja, em  $s = 0$ .

$$w_{esq} = w_{dir} \Rightarrow A_3 + A_4 = A_1 + A_2 \quad (4.11)$$

$$\frac{dw_{esq}}{ds} = \frac{dw_{dir}}{ds} \Rightarrow A_3\gamma_3 + A_4\gamma_4 = A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 \quad (4.12)$$

$$M_{esq} = M_{dir} \Rightarrow A_3\gamma_3^2 + A_4\gamma_4^2 = A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 \quad (4.13)$$

$$Q + V_{dir} = V_{esq} \Rightarrow \frac{Q}{8EI\beta^3} + A_3\gamma_3^3 + A_4\gamma_4^3 = A_1\gamma_1^3 + A_2\gamma_2^3 \quad (4.14)$$

Sendo que, a equação 4.14 tem em consideração a utilização da Figura 2.4 e das expressões 2.6 e 2.7, expostas no Capítulo 2, secção 2.1.

As condições de continuidade apresentam-se de forma matricial em 4.15:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_4 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & -\gamma_3^2 & -\gamma_4^2 \\ \gamma_1^3 & \gamma_2^3 & -\gamma_3^3 & -\gamma_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = w_{máx} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Em que  $w_0$  representa o deslocamento máximo provocado pela carga de roda  $Q$  estática, ou seja, ao deslocamento verificado no ponto de aplicação da carga, expressão 4.16.

$$w_{máx} = \frac{Q}{2.k.L} \quad (4.16)$$

Resolvendo este sistema, é possível determinar os parâmetros  $A_i$  necessários para a obtenção da solução da equação diferencial, obtendo-se assim a relação entre a deformação e a distância.

Em Fryba (1972), apresentam-se as soluções para diferentes casos de estudo, nomeadamente, para vias com amortecimento, sem amortecimento, velocidades sub-críticas, críticas, entre outros. A resolução destas expressões, é conseguida através de transformações de integrais.

A Tabela 4.1, apresenta a relação entre os valores de  $\alpha$  e as suas respectivas designações. Para o presente trabalho, apenas tem interesse prático as situações de velocidades nulas (problemas estáticos efectuados no Capítulo anterior) e velocidades sub-críticas.

Tabela 4.1: Valores característicos de  $\alpha$

$\alpha$	Designação
0	Velocidades nulas
0.5	Velocidades sub-críticas
1	Velocidades críticas
2	Velocidades super-críticas

Ao definir o parâmetro  $\alpha$ , expressão 4.6, fez-se referência à velocidade crítica. Esta velocidade é assim denominada, quando a velocidade máxima de circulação da carga de roda, que uma determinada via ferroviária pode estar sujeita, é ultrapassada, ocorrendo efeitos adversos no comportamento da via. No entanto, devido ao facto de neste trabalho se utilizar o modelo de cálculo de Winkler, esta velocidade não corresponderá à velocidade da carga de roda mas sim, à velocidade das ondas de Rayleigh emitidas pelo carril ao solo, devido à passagem desta carga.

O valor desta velocidade, para uma via com características específicas, pode ser calculada através da expressão 4.17.

$$v_{cr} = \sqrt[4]{\frac{4 \times k \times EI}{m^2}} \quad (4.17)$$

Onde  $m$  corresponde a massa da viga por unidade de comprimento. Considerou-se para um carril  $UIC - 54$   $m = 54.7kg/m$  e para um carril  $UIC - 60$   $m = 60.34kg/m$ .

Referir que os resultados apresentados neste estudo, foram obtidos, através da solução analítica, para um problema com amortecimento nulo. Desta forma, seguidamente apresenta-se a dedução da expressão que possibilita a determinação dos deslocamentos para esta situação.

Para problemas com amortecimento nulo, a amplificação dinâmica é definida através da expressão 4.18.

$$\frac{w_{din}}{w_{est}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_{cr}}\right)^2}} \quad (4.18)$$

Das expressões 4.17 e 4.18, deduz-se facilmente a solução, apresentada em 4.19, que permite calcular o deslocamento para o caso em que a carga de roda apresenta uma determinada velocidade  $v$  constante, ou seja, para uma situação dinâmica.

$$w_{din} = w_{est} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_{cr}}\right)^2}} \quad (4.19)$$

#### 4.1.1 Carga concentrada sem variação de rigidez

##### Apresentação de resultados

Os resultados expostos nesta sub-secção, relativos aos deslocamentos provocados por uma carga de roda em movimento com velocidade constante sobre uma via fundada num solo de fundação com rigidez constante, foram determinados tendo em consideração o modelo de cálculo representado na Figura 4.2.

Como se verifica, de acordo com a mesma Figura, os resultados foram obtidos para situações em que o amortecimento da via não é considerado.

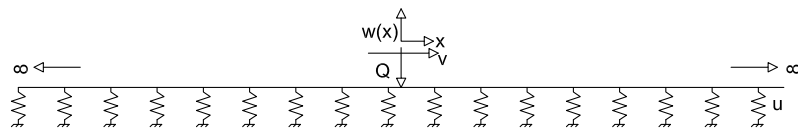


Figura 4.2: Modelo de cálculo utilizado

Os resultados apresentam-se, novamente, organizados em dois casos de estudo, tal como já sucedeu nas secções anteriores, o primeiro é referente a um solo de classe *QS3*, e o segundo para um solo mole, de classe *QS1*.

Em cada caso serão estudadas duas situações distintas, ou seja, para vias com características diferentes. Assim sendo, para cada situação presente nos dois casos de estudo, exhibe-se uma Figura onde se ilustra a linha representativa da deformada provocada pela acção da carga de roda a circular com determinada velocidade, bem como uma Tabela onde se exibem os vários deslocamentos obtidos, em  $x = 0m$ , para as diferentes velocidades de circulação.

Efectua-se, também, uma comparação destes valores para as diferentes velocidades de circulação com o caso estático. Esta comparação foi realizada através da determinação da diferença absoluta, de acordo com a expressão 4.20.

$$Diferença[\%] = \frac{|w_{est} - w_{din}|}{w_{est}} \times 100 \quad (4.20)$$

Onde  $w_{est}$  correspondem aos deslocamentos obtidos para o caso estático e  $w_{din}$  são aos deslocamentos determinados para cargas dinâmicas, ou seja, que circulam com uma determinada velocidade.

Conforme referi anteriormente, para o presente trabalho tem interesse prático casos com velocidades sub-críticas. Desta forma, as velocidades de circulação para as quais foram calculados os deslocamentos foram de  $10m/s$ ,  $40m/s$ ,  $60m/s$  e  $70m/s$ . Foi assim possível, observar com maior facilidade a relação existente entre o aumento da velocidade de circulação da carga de roda com o aumento dos deslocamentos.

Os resultados exibidos foram determinados através de um programa realizado em *Matlab*.

### Primeiro caso de estudo

No primeiro caso de estudo apresentam-se, conforme atrás mencionado, os resultados obtidos para duas situações distintas. Assim, e em primeiro lugar, a Figura 4.3 e a Tabela 4.2, exibem os resultados referentes a uma via ferroviária constituída por um carril *UIC* – 60 sujeita à acção de uma carga de roda de  $80kN$ .

Para a segunda situação, cujos resultados se expõem através da Figura 4.4 e da Tabela 4.3, estudou-se uma situação em que uma carga de roda, também de  $80kN$ , está aplicada num carril do tipo *UIC* – 54.

A Figura 4.3 e a Tabela 4.2 apresentam para a primeira situação, respectivamente, a deformada obtida para uma carga a circular com velocidade de  $70m/s$  e o valor dos deslocamentos máximos determinados para as diferentes velocidades de circulação, onde também se efectuou uma comparação entre os deslocamentos obtidos para as várias velocidades com o caso estático.



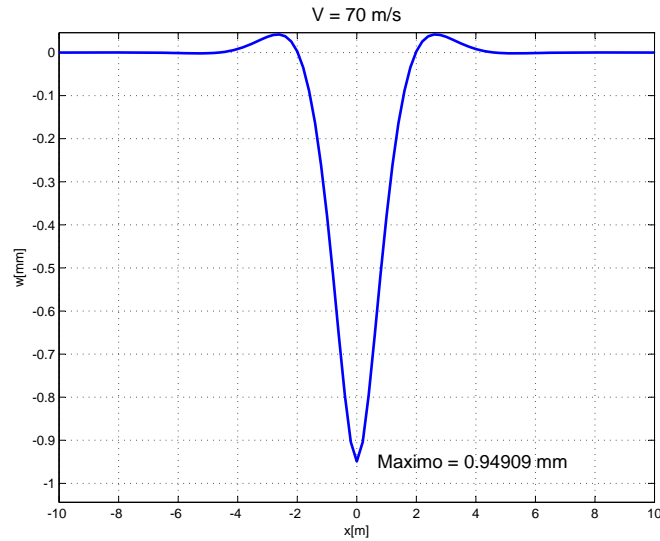


Figura 4.3: Deformada obtida num carril *UIC* – 60 sujeita a uma carga de  $80\text{ kN}$ , para uma velocidade de  $70\text{ m/s}$

Tabela 4.2: Comparação dos deslocamentos obtidos para um carril *UIC* – 60 e uma carga de  $80\text{ kN}$

$Q = 80\text{ kN}$ ; <i>UIC</i> – 60; Solo rijo		
Velocidade [m/s]	Deslocamento [mm]	Diferença [%]
0	–0.94517	0.00
10	–0.94525	0.01
40	–0.94645	0.14
60	–0.94805	0.30
70	–0.94909	0.41

Foi possível observar, que para estas circunstâncias, o valor máximo do deslocamento ocorre no ponto de aplicação da carga, ou seja, em  $x = 0\text{ m}$ , e que este aumenta com o respectivo aumento da velocidade de circulação da carga, Tabela 4.2. Contudo, este aumento no valor das deformações acontece de uma forma muito gradual.

Comparando agora o deslocamento obtido para o caso estático com os valores determinados para as diferentes velocidades de circulação, observou-se nesta mesma Tabela que, para esta situação, todos os resultados se encontram bastante próximos para a solução em que a velocidade é nula, pois o valor da diferença para a maior velocidade,  $70\text{ m/s}$ , é de apenas  $0.41\%$ , não sendo possível, desta forma, afirmar que esta diferença seja significativa.

No entanto, e tal como foi referido, o aumento da velocidade de circulação da carga de roda provoca maiores deslocamentos em  $x = 0\text{ m}$  e, conseqüentemente, aumenta o valor da diferença relativa. Tal acontecimento, deve-se ao facto da velocidade de circulação da carga se aproximar da velocidade crítica para a presente via ferroviária.

Aplicando a expressão 4.17, é possível verificar que para uma via com estas características

esta velocidade ocorre próximo de  $770.5m/s$ .

Para concluir o primeiro caso de estudo, visualiza-se na Figura 4.4 e na Tabela 4.3 os resultados obtidos para a segunda situação descrita inicialmente, ou seja, para uma carga de  $80kN$  aplicada num carril  $UIC - 54$ .

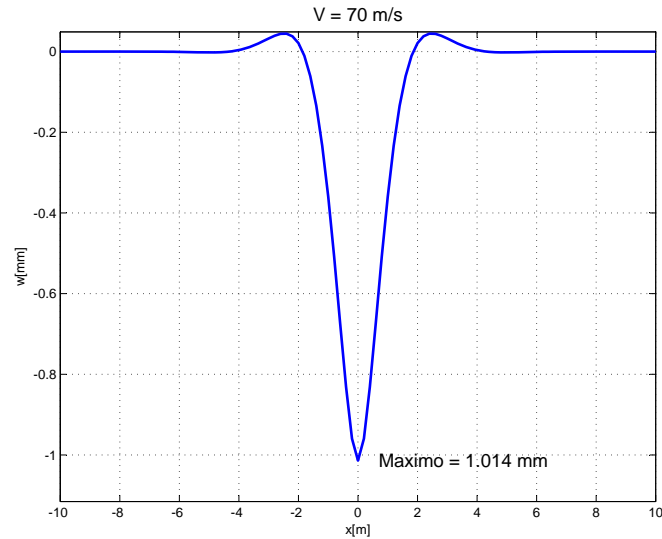


Figura 4.4: Deformada obtida num carril  $UIC - 54$  sujeita a uma carga de  $80kN$ , para uma velocidade de  $70m/s$

Tabela 4.3: Comparação dos deslocamentos obtidos para um carril  $UIC - 54$  e uma carga de  $80kN$

$Q = 80kN$ ; $UIC - 54$ ; Solo rijo		
Velocidade $[m/s]$	Deslocamento $[mm]$	Diferença $[\%]$
0	-1.0097	0.00
10	-1.0098	0.01
40	-1.0111	0.14
60	-1.0129	0.32
70	-1.0140	0.43

Mais uma vez, para esta situação, o valor do deslocamento máximo ocorre no ponto de aplicação da carga, ou seja, em  $x = 0m$ , e aumenta com o respectivo aumento da velocidade de circulação da carga.

Confrontando o valor dos deslocamentos máximos obtidos para as diferentes velocidades com o caso estático, verificou-se, tal como para a primeira situação, que todos os valores determinados se encontram muito próximos desta última solução, como é possível visualizar para uma velocidade de  $70m/s$ , em que o valor da diferença para esta situação é de  $0.43\%$ , um pouco superior ao que ocorre para o carril  $UIC - 60$ .

O valor da velocidade crítica para uma via ferroviária com estas características é de  $757.5m/s$ .

Para finalizar, é correcto afirmar que os erros relativos são maiores para a segunda situação, denominada assim para uma carga de  $80kN$  aplicada num carril  $UIC - 54$ , conforme se apura das Tabelas 4.2 e 4.3 para uma velocidade de  $80m/s$ , por exemplo, onde o valor da diferença é de  $0.43\%$  para esta segunda situação e de  $0.41\%$  para a primeira.

O valor desta diferença aumenta com o respectivo aumento da velocidade de circulação da carga, concluindo-se assim, que os valores obtidos para o carril  $UIC - 54$  apresentam diferenças maiores entre os deslocamentos obtidos para as várias velocidades e o caso estático.

### Segundo caso de estudo

Também neste segundo caso de estudo, irão ser estudadas duas situações distintas, tal como ocorreu no anterior caso. Deste modo, a primeira situação, cujas soluções se apresentam na Figura 4.5 e na Tabela 4.4, referem-se a uma carga de  $80kN$  aplicada num carril do tipo  $UIC - 60$ . Já a segunda diz respeito a uma carga com o mesmo valor mas aplicada num carril  $UIC - 54$ . As suas soluções serão apresentadas na Figura 4.6 e na Tabela 4.5.

Seguidamente, apresentam-se os resultados para o primeiro caso.

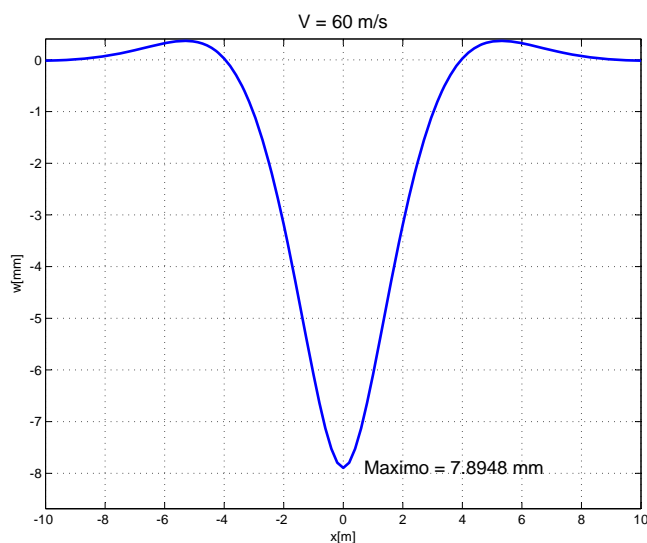


Figura 4.5: Deformada obtida num carril  $UIC - 60$  sujeita a uma carga de  $80kN$ , para uma velocidade de  $60m/s$

Na Figura 4.5 apresenta-se a linha representativa da deformada obtida para a velocidade de  $60m/s$ . Visualiza-se, novamente, que o valor máximo deste deslocamento ocorre no ponto de aplicação da carga de roda e que, conforme demonstrado na Tabela 4.4, o valor máximo dos deslocamentos aumentam com o respectivo aumento da velocidade de circulação.

Através da mesma Tabela, e comparando com os valores apresentados na Tabela 4.2,

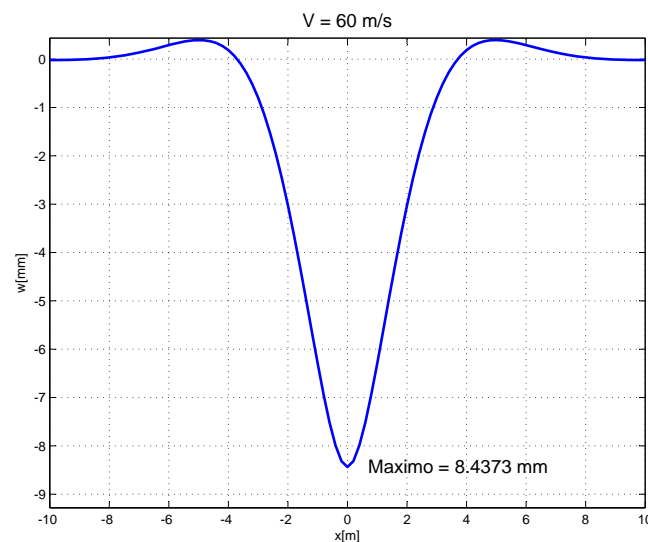
Tabela 4.4: Comparação dos deslocamentos obtidos para um carril *UIC* – 60 e uma carga de  $80kN$ 

$Q = 80kN$ ; <i>UIC</i> – 60; Solo mole		
Velocidade [ $m/s$ ]	Deslocamento [ $mm$ ]	Diferença [%]
0	–7.7964	0.00
10	–7.7991	0.03
40	–7.8397	0.56
60	–7.8948	1.26
70	–7.9312	1.73

apura-se que o valor das diferenças obtidas são superiores para um solo de classe *QS1*, solo mole, do que para um solo rijo, de classe *QS3*, como se verifica, por exemplo, para uma velocidade de  $40m/s$  em que para este caso o valor da diferença é de 0.56% enquanto para a mesma situação,  $Q = 80kN$  e *UIC* – 60, num solo rijo é de 0.14%.

Este acontecimento ocorre, devido ao facto de a velocidade crítica ser atingida, neste segundo caso de estudo, para uma velocidade de circulação mais baixa, nomeadamente aos  $381.3m/s$ .

Finalmente, para concluir o estudo das deformações provocadas por uma carga de roda dinâmica, estuda-se agora a situação de uma carga de  $80kN$  aplicada num carril *UIC* – 54.

Figura 4.6: Deformada obtida num carril *UIC* – 54 sujeita a uma carga de  $80kN$ , para uma velocidade de  $60m/s$ 

Os resultados apresentados para a presente situação permitem concluir o mesmo que fora dito para o caso anterior, isto é, o valor dos deslocamentos máximos, para as velocidades de circulação estudadas, ocorrem no ponto de aplicação da carga e o valor destes aumentam com o respectivo aumento desta velocidade, conforme se visualiza na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Comparação dos deslocamentos obtidos para um carril *UIC* – 54 e uma carga de  $80kN$ 

$Q = 80kN$ ; <i>UIC</i> – 54; Solo mole		
Velocidade [ $m/s$ ]	Deslocamento [ $mm$ ]	Diferença [%]
0	–8.3285	0.00
10	–8.3315	0.04
40	–8.3763	0.57
60	–8.4373	1.31
70	–8.4776	1.79

Em relação à comparação de resultados obtidos para as diferentes velocidades de circulação e para o caso estático, verificou-se, novamente, que os resultados obtidos são próximos qualquer que seja o valor da velocidade. A maior diferença ocorre para  $70m/s$ , 1.79%, não sendo este um valor significativo.

Salienta-se o facto de que, a diferença entre os deslocamentos obtidos para as diferentes velocidades de circulação e o deslocamento obtido para o caso estático, serem maiores para a segunda situação, ou seja, para um carril *UIC* – 54 do que para um carril *UIC* – 60, conforme se visualiza nas Tabelas 4.4 e 4.5 e tal como se verificou para o primeiro caso de estudo.

Por fim, refere-se que a velocidade crítica para a presente via é de  $374.9m/s$ .

## Conclusões

O valor da velocidade crítica de uma determinada via ferroviária é importante para compreender e perceber a qualidade dessa mesma via, pois o seu valor pode variar de acordo com as condições em que esta se encontra. Assim, se estas apresentarem uma boa qualidade, a velocidade crítica está muito distante da velocidade aparente, ou seja, daquela que normalmente se verifica para vias ferroviárias convencionais. No entanto, se esta apresentar condições deficientes ou fundadas num solo de má qualidade, a velocidade crítica pode ser tão baixa que será necessário tomar medidas especiais por forma a aumentar esta velocidade.

Como se pode visualizar nos resultados apresentados anteriormente em ambos os casos de estudos, o valor da velocidade crítica é atingida mais cedo para um carril do tipo *UIC* – 54 e para um solo de classe *QS1*, ou seja, para um solo de características moles.

Deste modo, quando a velocidade crítica ocorre para velocidades de circulação muito baixas, como aconteceu no segundo caso de estudo, o valor máximo dos deslocamentos pode surgir antes e depois do ponto de aplicação da carga, consoante o valor da sua velocidade, não ocorrendo obrigatoriamente no ponto de aplicação da carga, como se verificou para o primeiro caso de estudo, Figuras 4.3 e 4.4. Estas situações não foram estudadas na presente dissertação pois, tal como se referiu inicialmente, só têm interesse prático velocidades sub-críticas.

Visualizou-se também, tanto para o primeiro caso de estudo como para o segundo, que para as velocidades de carga de roda estudadas o valor dos deslocamentos máximos, ocorridos

no ponto de aplicação da carga, são muito próximos aos obtidos para o caso estático.

É muito importante referir, mais uma vez, que os valores obtidos para a velocidade crítica são muito elevados. Na realidade, os valores aqui apresentados são referentes à velocidade de propagação das ondas de Rayleigh, e não a velocidade da carga de roda. Isto é uma particularidade do modelo de Winkler aqui utilizado, conforme foi dito inicialmente nesta secção.

## 4.2 Solução numérica

Existem relativamente poucos estudos relacionados com a simulação numérica de cargas de roda dinâmicas a actuar em vias com diferentes condições de fundação, como é o caso de zonas de transição. O estudo efectuado na presente secção tem por base o trabalho elaborado em Varandas et al. (2010a), correspondente a um modelo de cálculo de forças dinâmicas exercidas pelas travessas sobre o balastro devido à passagem de veículos ferroviários.

Segundo este, o estudo numérico sobre a resposta dinâmica em zonas de transição requer o desenvolvimento de um modelo que tenha em consideração alguns aspectos, entre os quais se destacam o facto das características do suporte da via ferroviária variar espacialmente, o perfil vertical da via, a possibilidade de existência de travessas suspensas, ou seja, travessas que não estão em contacto directo com o balastro, a interacção dinâmica do sistema veículo-via e, por último, o facto do solo de fundação apresentar uma relação constitutiva não-linear.

Pela simples razão da análise aqui desenvolvida pertencer a um trabalho académico, considerou-se que a relação constitutiva do solo de fundação é linear e que todas as travessas estão em permanente contacto com o balastro, razão pela qual não haverá travessas suspensas.

Desprezou-se também, a componente inercial associada à massa do próprio veículo, pelo que as forças a actuar na via correspondem somente a forças de valor constante em movimento.

Na Figura 4.7 exhibe-se uma representação esquemática do modelo unidimensional usado neste trabalho para obtenção dos resultados pretendidos.

Este apresenta, entre outros, os seguintes pressupostos:

1. O veículo desloca-se a uma velocidade constante da esquerda para a direita;
2. O eixo longitudinal da via corresponde a um eixo de simetria da estrutura;
3. O balastro que está colocado em redor das travessas gera atrito de amortecimento e a vibração da zona de contacto da travessa com a camada de balastro gera amortecimento de radiação;

Para o presente modelo, e tal como sucedeu na secção 3.2, o carril é modelado através duma viga do tipo Euler-Bernoulli. Em relação às travessas, estas são representadas por massas enquanto o suporte das mesmas é representado por um sistema discreto mola-amortecedor.

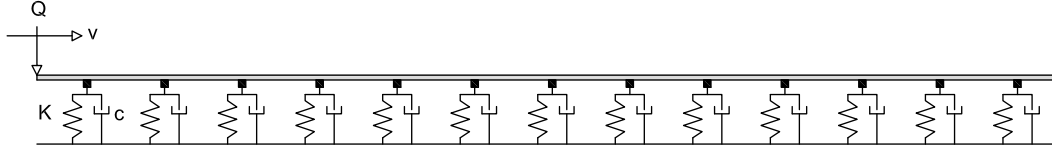


Figura 4.7: Modelo unidimensional utilizado para determinação dos esforços pretendidos

No entanto, sendo o modelo de cálculo utilizado relativamente simples, tal como se referiu anteriormente, os resultados determinados foram obtidos considerando o suporte das travessas como um sistema de molas-amortecedores em que os primeiros apresentam uma rigidez bi-linear, de acordo com:

$$F_{mola} = K \times u_t, \quad u_t > u_c \quad (4.21)$$

Em que  $K$  corresponde, como já se referiu, à rigidez linear da mola,  $u_t$  é o deslocamento vertical da travessa e  $u_c$  é o ponto de contacto da travessa com o balastro.

Caso  $u_t \leq u_c$ , a força exercida pela mola será nula.

A Figura 4.8, representa o comportamento das molas utilizadas no referido modelo:

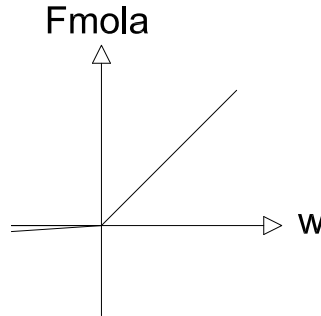


Figura 4.8: Comportamento das molas de rigidez bi-linear

Neste modelo, o amortecedor representa a dissipação de energia que ocorre quando a travessa é pressionada contra o balastro. Esta dissipação justifica-se primordialmente por radiação de energia no meio subjacente. Por este motivo foi usado o modelo de Lysmer, de acordo com Mylonakis et al. (2006), para cálculo do valor da constante de amortecimento:

$$F_{amort.} = \begin{cases} c_{rd} \times \dot{w}, & \text{se } u_t > u_c \\ 0, & \text{se } u_t < u_c \end{cases} \quad (4.22)$$

Em que a constante de amortecimento visco-elástico,  $c_{rd}$ , deste sistema é determinada de acordo com a expressão 4.23:

$$c_{rd} = \frac{3.4 \times A}{(1 - \nu)\pi} \times \sqrt{G \times \rho} \quad (4.23)$$

Onde:

$$G = \frac{E}{2 \times (1 + \nu)} \quad (4.24)$$

Sendo  $A$  a área de contacto da travessa com o balastro,  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $G$  o módulo de corte e  $\rho$  a massa volúmica do semi-espço.

Este modelo unidimensional de uma viga fundada em meio de Winkler apresenta, no entanto, algumas limitações. Assim, as ondas no terreno podem desempenhar um papel importante na resposta dinâmica em determinadas vias, especialmente se a velocidade de circulação se aproximar da velocidade da onda de Rayleigh, designado deste modo para o efeito da velocidade crítica, ou se existirem significativas heterogeneidades na sub-estrutura.

A primeira situação referenciada pode ser evitada limitando as análises efectuadas a estudos em que a velocidade de circulação do comboio seja significativamente menor que a velocidade crítica da via. No entanto, a segunda situação não pode ser evitada visto que, nas já referidas zonas de transição, a sub-estrutura da via é necessariamente heterogénea.

Segundo o trabalho desenvolvido em Varandas et al. (2010a), e que serviu como base para realização deste estudo, as equações de movimento para a via são, de acordo com a segunda Lei de Newton e o Princípio de d'Alembert:

$$F_{e,via} + F_{d,via} + F_{i,via} = F_g + Q \quad (4.25)$$

Conforme se visualiza através desta expressão, as forças de resistência devido à deformação,  $F_e$ , amortecimento,  $F_d$ , e inércia,  $F_i$ , estão em equilíbrio com as forças aplicadas, nomeadamente a força gravítica,  $F_g$ , e a força de roda em movimento,  $Q$ .

A expressão geral, que permite determinar a resposta de uma carga móvel assente sobre uma via com as características indicadas na Figura 4.7, é:

$$[K].\bar{u}_v + [C].\bar{\dot{u}}_v + [M].\bar{\ddot{u}}_v + F_{mola} + F_{amort.} = F_g + Q \quad (4.26)$$

Onde  $[K]$ ,  $[C]$  e  $[M]$  correspondem às matrizes de rigidez, amortecimento e massa e  $\bar{u}_v$ ,  $\bar{\dot{u}}_v$  e  $\bar{\ddot{u}}_v$  são, respectivamente, os vectores deslocamentos generalizados, velocidades e acelerações.

Salienta-se que, todas as matrizes foram obtidas pelo método tradicional de assemblagem de elementos finitos, de acordo com Azevedo (2003).

Em relação à matriz de amortecimento  $[C]$ , em que todos os termos foram considerados lineares, resulta da soma dos valores obtidos através das expressões 4.23 e 4.27, sendo esta última o amortecimento de Rayleigh.



Descreve-se, seguidamente, o processo de realização desta matriz de acordo com o conceito de amortecimento de Rayleigh, relatado em Chopra (1995):

$$C' = a_0[M] + a_1[K] \quad (4.27)$$

Em que os parâmetros  $a_0$  e  $a_1$  são determinados através das expressões 4.28 e 4.29, respectivamente:

$$a_0 = c \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad (4.28)$$

$$a_1 = c \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (4.29)$$

Onde  $c$  corresponde à percentagem de amortecimento seleccionada para duas frequências circulares,  $\omega_i$  e  $\omega_j$ . Este valor está relacionado com o amortecimento devido ao material constituinte do carril (aço), à ligação carril-travessa e com a fricção entre a travessa e o balastro.

Os valores necessários para a correcta resolução deste procedimento encontram-se definidos em 4.2.1.

### Processo de integração

De acordo com Varandas et al. (2010a), o processo de integração adoptado para obtenção de resultados aproximados das equações de movimento foi um esquema de integração “previsão-correcção” do tipo explícito, em que as condições iniciais do problema são, supostamente, conhecidas:

$$u_v(0) = u_{v,0}; v_v(0) = v_{v,0} \quad (4.30)$$

Apresenta-se, de seguida, os passos sequenciais deste procedimento:

1. Previsão dos deslocamentos e velocidades de ambos os sistemas (veículo e via);

$$\tilde{u}_{v,n+1} = u_{v,n} + v_{v,n}\Delta t + \left(\frac{1}{2} + \psi\right) a_{v,n}\Delta t^2 - \psi a_{v,n-1}\Delta t^2 \quad (4.31)$$

$$\tilde{v}_{v,n+1} = v_{v,n} + (1 + \varphi)a_{v,n}\Delta t - \varphi a_{v,n-1}\Delta t \quad (4.32)$$

Onde o símbolo  $\sim$  indica o valor de previsão,  $\Delta t$  o intervalo de tempo e, por último,  $\psi$  e  $\varphi$  são os parâmetros de integração. O índice  $n$  representa o intervalo de tempo de integração em utilização.

2. Os vectores força das equações de movimento são determinados, incluindo as forças de interacção  $F_a$ , através de previsão;
3. Os vectores aceleração de ambos os sistemas são resolvidos a partir das mesmas equações de movimento referidas em cima, utilizando as previsões obtidas em 1. e 2.;

$$\tilde{a}_{v,n+1} = M_v^{-1} \left( -F_{s.v,n+1} - \tilde{F}_{rd.v,n+1} + F_{g.v} - \tilde{F}_{a,n+1} - K_v \tilde{u}_{v,n+1} - C_v \tilde{v}_{v,n+1} \right) \quad (4.33)$$

4. Os valores corrigidos de deslocamentos e velocidades em ambos os sistemas são determinados através do método de Newmark;

$$u_{v,n+1} = u_{v,n} + v_{v,n} \Delta t + \left( \frac{1}{2} - \xi \right) a_{v,n} \Delta t^2 + \xi \tilde{a}_{v,n+1} \Delta t^2 \quad (4.34)$$

$$v_{v,n+1} = v_{v,n} + (1 - \Upsilon) a_{v,n} \Delta t + \Upsilon \tilde{a}_{v,n+1} \Delta t \quad (4.35)$$

5. Após obtenção dos valores definidos em 4., os vectores força das referidas equações de movimento são re-calculados;
6. Através dos valores correctos obtidos nos passos 4. e 5., é possível determinar a aceleração de ambos os sistemas a partir, novamente, das equações de movimento;

$$a_{v,n+1} = M_v^{-1} \left( -F_{s.v,n+1} - F_{rd.v,n+1} + F_{g.v} - F_{a,n+1} - K_v u_{v,n+1} - C_v v_{v,n+1} \right) \quad (4.36)$$

Os valores utilizados para os parâmetros  $\psi$  e  $\xi$  foi  $1/6$ , enquanto para  $\varphi$  e  $\Upsilon$  foi  $1/2$ .

Por último, refere-se o facto de para o primeiro passo de integração, os parâmetros  $\psi$  e  $\varphi$  são nulos. Desta forma, a aceleração foi determinada através da expressão 4.37:

$$a_{v,0} = M_v^{-1} \left( -F_{s.v,0} - F_{rd.v,0} + F_{g.v} - K_v u_{v,0} - C_v v_{v,0} \right) \quad (4.37)$$

#### 4.2.1 Carga concentrada com variação de rigidez

Quando uma via ferroviária está assente, ao longo de todo o seu comprimento, sobre diferentes estruturas e, conseqüentemente, sobre diferentes valores de rigidez de fundação, é usual criar-se uma zona de transição entre estas duas áreas em que o principal objectivo desta consiste na suavização da mudança súbita de rigidez, de modo a que esta alteração seja efectuada de forma gradual.

Por norma, as transições entre uma estrutura mais rígida, como uma ponte, e uma estrutura menos rígida são, na maioria das vezes, zonas problemáticas. O aparecimento dos indesejados efeitos dinâmicos ou o facto de o nivelamento da via nestas zonas se deteorizar mais rapidamente, devido aos assentamentos diferenciais, leva a um aumento da manutenção da via onde, em certos casos, o número de inspecções de manutenção é muito superior aos que se verificam para os restantes locais da mesma via.

De acordo com Varandas et al. (2010b), a má conduta em algumas zonas de transição pode ser atribuída ao deficiente comportamento do balastro, enquanto Jenks (2006) afirma que a deteriorização da via ferroviária nestas zonas de transição depende também da direcção do deslocamento do veículo, ou seja, se este se desloca da estrutura mais rígida para a mais suave ou o contrário.

Deste modo, na presente secção estudou-se o comportamento de algumas vias ferroviárias, com diferentes tipos de fundação ao longo do seu comprimento por forma a analisar o comportamento destas zonas de transição, sujeitas à acção de uma carga dinâmica. Os estudos efectuados contemplam a determinação dos deslocamentos e a força transmitida às travessas para diferentes velocidades de circulação.

A Figura 4.9 apresenta o modelo de cálculo considerado:

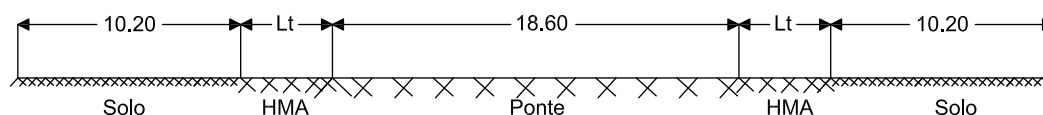


Figura 4.9: Via ferroviária assente sobre diferentes tipos de fundação

Como se referiu anteriormente, e tal como a Figura 4.9 demonstra, a via ferroviária está assente, ao longo de todo o seu comprimento, sobre diferentes tipos de fundação de modo a simular situações em que se verifique variações de rigidez. A principal transição que se verifica neste modelo, é a passagem da carga dinâmica de um solo com características medianas, com comprimento  $10.20m$ , para uma ponte com comprimento de  $18.60m$ .

Desta forma, e para que esta transição não seja efectuada de forma brusca, reforçou-se, ao longo de um comprimento  $L_t$  variável, a fundação do solo através de uma camada de asfalto colocada entre o balastro e o sub-balastro. A instalação deste elemento estrutural apresenta como principal função o reforço da fundação do solo através do aumento da capacidade de resistência do mesmo e, desta forma, aumentar a rigidez deste solo. Assim, a aproximação à ponte, onde os valores de rigidez são mais elevados, é executado por um solo devidamente tratado para que o aumento da rigidez de fundação seja realizado de forma gradual.

É de referir que, esta camada de asfalto, denominada também por “*Hot Mix Asphalt*” (*HMA*), consiste numa mistura de betume com agregados, em que a sua rigidez varia de acordo com a relação entre os constituintes e a distribuição do tamanho das partículas dos agregados.

Os resultados apresentados ao longo deste Capítulo foram obtidos através da utilização de um programa, efectuado em *Matlab*, fornecido pelo Engenheiro José Nuno Varandas. Em Varandas et al. (2010a) explica-se, com maior detalhe, o funcionamento deste programa.

Em relação aos dados de entrada necessários à correcta utilização do mesmo, nomeada-

mente o valor da carga de roda e os parâmetros que avaliam a rigidez dos diferentes tipos de fundação, que tal como para os estudos anteriores foram caracterizados por uma mola com comportamento linear, foram consultados em Jenks (2006) e Li e David (2005). Em ambos são apresentados resultados de vários estudos efectuados para vias ferroviárias com características distintas.

Seguidamente, enumera-se alguns pressupostos que foram assumidos para obtenção dos resultados apresentados através do já referido programa:

1. A carga desloca-se a uma velocidade constante da esquerda para a direita;
2. As travessas estão colocadas a uma distância equidistante umas das outras;
3. A rigidez do suporte de cada travessa, particularmente o solo de fundação, é linear;
4. Todas as travessas deste modelo estão em contacto permanente com o balastro, não podendo haver, deste modo, travessas suspensas;
5. Inicialmente, a via ferroviária apresenta um nivelamento vertical nulo.

A Tabela 4.6, apresenta os valores assumidos para os parâmetros caracterizadores da via.

Tabela 4.6: Definição dos parâmetros caracterizadores da via

Massa do carril [ $ton/m$ ]	0.0547
Massa da travessa [ $ton$ ]	0.08
Nº elementos entre travessas	3
Rigidez de flexão do carril [ $kN/m^2$ ]	4910
Amortecimento [%]	4
Distância entre travessas [ $m$ ]	0.6
Coefficiente de Poisson do semi-espaco	0.15
Módulo elasticidade do semi-espaco [ $GPa$ ]	200
Área de contacto travessa-balastro [ $m^2$ ]	$0.8 \times 0.28$
Massa volúmica do semi-espaco [ $kg/m^3$ ]	1800
$\omega_i$ [ $rad/s$ ]	12.6
$\omega_j$ [ $rad/s$ ]	188.5

Em relação aos cálculos efectuados, a determinação das deformações e a força transmitida às travessas, estes foram realizados em seis vias ferroviárias distintas, sendo que estas se diferenciam umas das outras no comprimento de solo tratado com *HMA* e no valor de rigidez assumido para este comprimento. Assim, as vias ferroviárias *I*, *II* e *III*, descritas na Tabela 4.7 apresentam, respectivamente, um comprimento de transição de  $1.8m$ ,  $6m$  e  $12m$ . Para os valores de rigidez, que é constante ao longo deste comprimento, foi fixado um valor intermédio entre os valores definidos para a rigidez do solo e para a rigidez da ponte. As vias ferroviárias

*IV*, *V* e *VI* apresentam o mesmo comprimento das vias anteriores mas, no entanto, a sua rigidez aumenta de forma gradual, tal como a Figura 4.10 demonstra, até atingir a rigidez máxima da ponte.

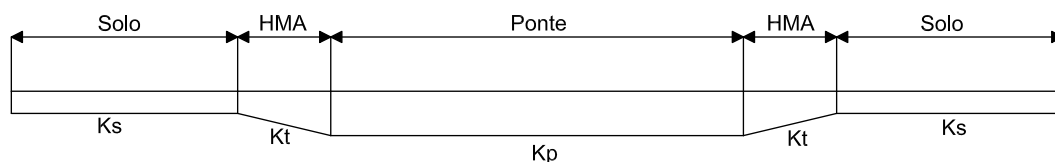


Figura 4.10: Aumento da rigidez da via de forma gradual

Tabela 4.7: Tipos de vias ferroviárias estudadas

Tipo de via	Solo	Aproximação à ponte	Ponte
<i>I</i>	Travessas de madeira; Rigidez do sub-leito média; $k = 18000kN/m$	Travessas em madeira; Rigidez do sub-leito média; Comprimento de transição de $1.8m$ ; $k = 29400kN/m$	Travessas em madeira; Via balastrada; $k = 40800kN/m$
<i>II</i>	Travessas de madeira; Rigidez do sub-leito média; $k = 18000kN/m$	Travessas em madeira; Rigidez do sub-leito média; Comprimento de transição de $6m$ ; $k = 29400kN/m$	Travessas em madeira; Via balastrada; $k = 40800kN/m$
<i>III</i>	Travessas de madeira; Rigidez do sub-leito média; $k = 18000kN/m$	Travessas em madeira; Rigidez do sub-leito média; Comprimento de transição de $12m$ ; $k = 29400kN/m$	Travessas em madeira; Via balastrada; $k = 40800kN/m$
<i>IV</i>	Travessas de madeira; Rigidez do sub-leito média; $k = 18000kN/m$	Travessas em madeira; Rigidez do sub-leito média; Comprimento de transição de $1.8m$ ; Aumento gradual de rigidez	Travessas em madeira; Via balastrada; $k = 40800kN/m$
<i>V</i>	Travessas de madeira; Rigidez do sub-leito média; $k = 18000kN/m$	Travessas em madeira; Rigidez do sub-leito média; Comprimento de transição de $6m$ ; Aumento gradual de rigidez	Travessas em madeira; Via balastrada; $k = 40800kN/m$
<i>VI</i>	Travessas de madeira; Rigidez do sub-leito média; $k = 18000kN/m$	Travessas em madeira; Rigidez do sub-leito média; Comprimento de transição de $12m$ ; Aumento gradual de rigidez	Travessas em madeira; Via balastrada; $k = 40800kN/m$

Os parâmetros caracterizadores da rigidez do solo e da ponte, foram definidos, tal como já foi referido, de acordo com estudos efectuados em Jenks (2006) e em Li e David (2005).

Assim, definiu-se para o solo uma rigidez de  $18000kN/m$  e para a ponte de  $40800kN/m$ .

Por fim, a carga de roda corresponde a  $100.1kN$ , que de acordo com o trabalho realizado em Jenks (2006) corresponde a  $22.5kips$ , representativos de uma carga de roda estática mais 50% do factor dinâmico.

Em seguida, apresentam-se os resultados obtidos para cada uma das vias ferroviárias presentes na Tabela 4.7. Nas Figuras que se seguem, a imagem do lado esquerdo corresponde às deformações obtidas para cada travessa, enquanto a imagem do lado direito corresponde às forças exercidas pelos mesmos elementos. Para ambos os casos são apresentadas as soluções para diferentes valores de velocidade, nomeadamente  $v = 80km/h$  e  $v = 120km/h$ .

Salienta-se que, a força transmitida às travessas, para os casos estudados nesta sub-secção, corresponde à soma da força exercida pela mola com a força exercida pelo amortecedor, conforme a expressão 4.38 demonstra:

$$F_{Trav}^i = F_{mola} + F_{amort}. \quad (4.38)$$

## Apresentação de resultados

Nesta secção apresentam-se os resultados referentes aos tipos de vias descritas na Tabela 4.7. Estes foram organizados em duas sub-secções. A primeira - **Transição com rigidez constante** - é referente às vias ferroviárias tipo *I*, *II* e *III*, em que a rigidez do comprimento de transição é constante, enquanto a segunda - **Transição com aumento gradual de rigidez** - corresponde às vias *IV*, *V* e *VI*, em que a rigidez do comprimento de transição aumenta gradualmente até atingir a rigidez da ponte.

Para terminar apresentam-se, também, os resultados obtidos para os valores de transmissibilidade nas respectivas travessas constituintes da via.

### Transição com rigidez constante

As Figuras 4.11, 4.12 e 4.13 apresentam os resultados obtidos para as vias ferroviárias tipo *I*, *II* e *III*, respectivamente.

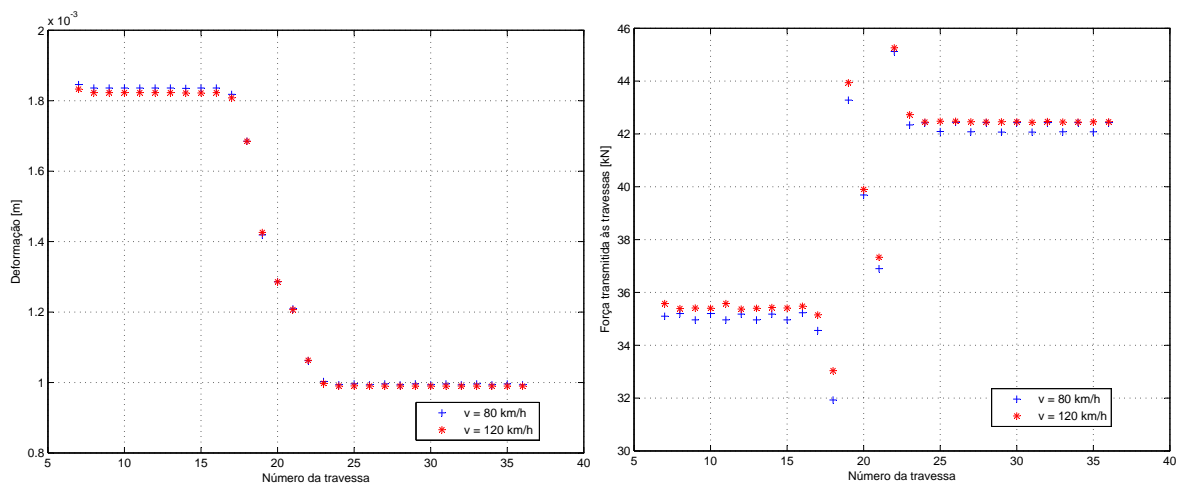
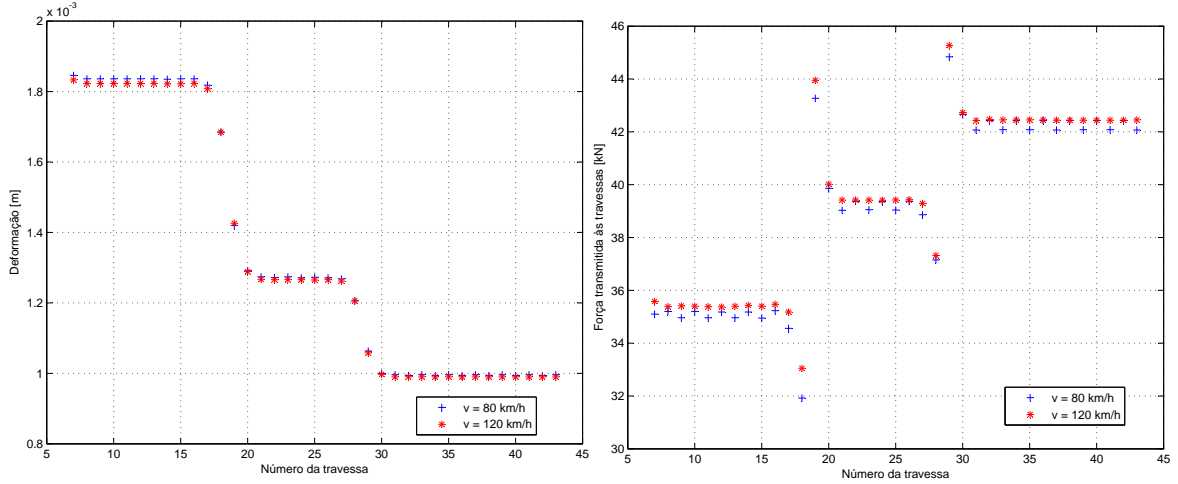
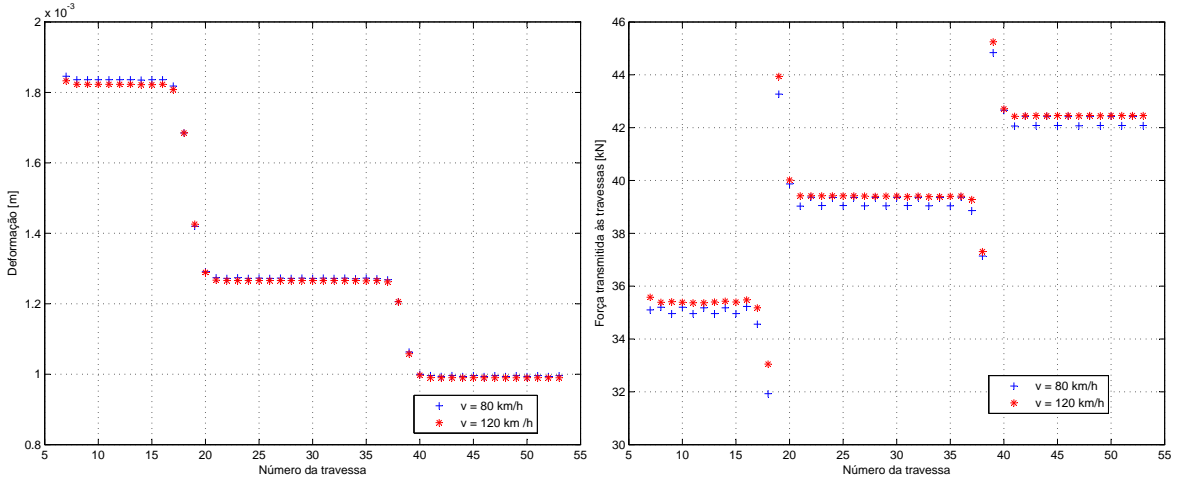


Figura 4.11: Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo *I*

Figura 4.12: Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo *II*Figura 4.13: Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo *III*

De uma breve análise efectuada às Figuras 4.11, 4.12 e 4.13, verificou-se que os resultados apresentados são muito próximos para ambas as velocidades de circulação da carga.

Visualizou-se, também, que o valor das deformações na zona de transição são praticamente iguais qualquer que seja o seu comprimento. No entanto, o facto de este comprimento aumentar faz com que a partir de uma determinada travessa, 20 para a via ferroviária tipo *II* e *III*, o valor da deformada estabilize e se torne constante até à penúltima travessa desta zona, respectivamente a 27 e 37 para a via tipo *II* e tipo *III*. Já a última travessa, a 28 para a via *II* e 38 para a via *III*, corresponde a um valor intermédio entre a penúltima travessa do solo tratado com *HMA* e a primeira localizada sobre a ponte, nomeadamente 29 e 39 para a via tipo *II* e tipo *III*.

Deste modo, conclui-se que o facto de o comprimento de transição aumentar faz com que a diminuição do valor das deformações do solo com características medianas para o solo tratado com *HMA* e deste para a ponte, não se realize de uma forma tão brusca, tal como ocorre para a via *I*.

O mesmo se pode concluir em relação às forças transmitidas para as travessas, sendo que

para este caso, ocorre o aumento e não a diminuição da força transmitida. A Figura 4.11, do lado direito, apresenta as oscilações de esforço que podem ocorrer caso o comprimento de transição seja muito pequeno. Estas também se visualizam na Figura 4.12, entre as travessas 18 e 19, por exemplo, e na Figura 4.13 nas travessas 38 e 39.

Estas oscilações bruscas no valor das forças transmitidas ao balastro irão provocar, a longo prazo, assentamentos diferenciais e o aparecimento de travessas suspensas.

De salientar que, ao contrário dos valores obtidos para as deformações, o esforços transmitidos às travessas são maiores para velocidades de circulação superiores.

### Transição com aumento gradual de rigidez

Seguidamente, as Figuras 4.14, 4.15 e 4.16 apresentam os resultados referentes às vias ferroviárias tipo *IV*, *V* e *VI*, onde mais uma vez os resultados apresentados para as velocidades de  $80\text{km/h}$  e  $120\text{km/h}$  são muito semelhantes.

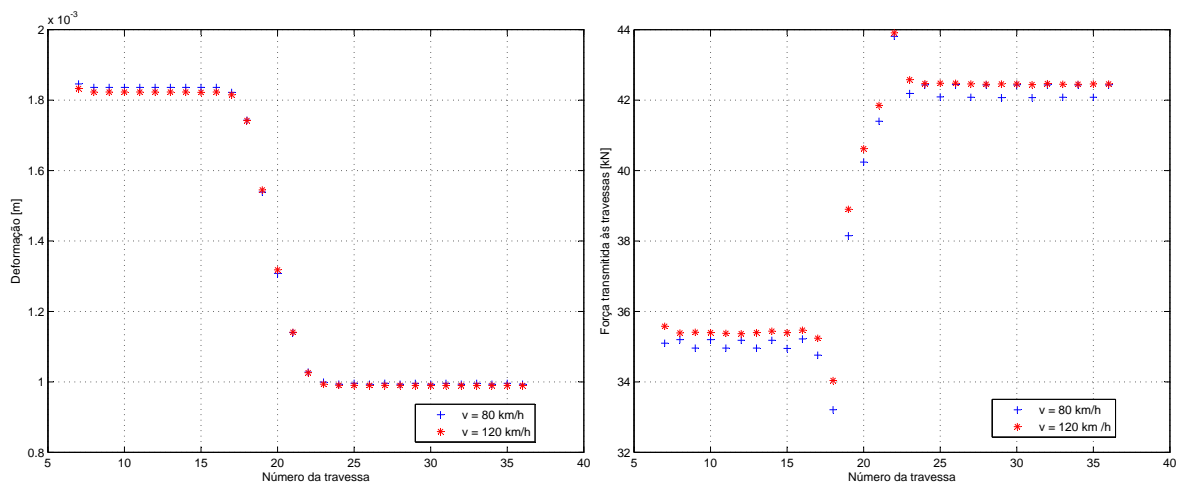


Figura 4.14: Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo *IV*

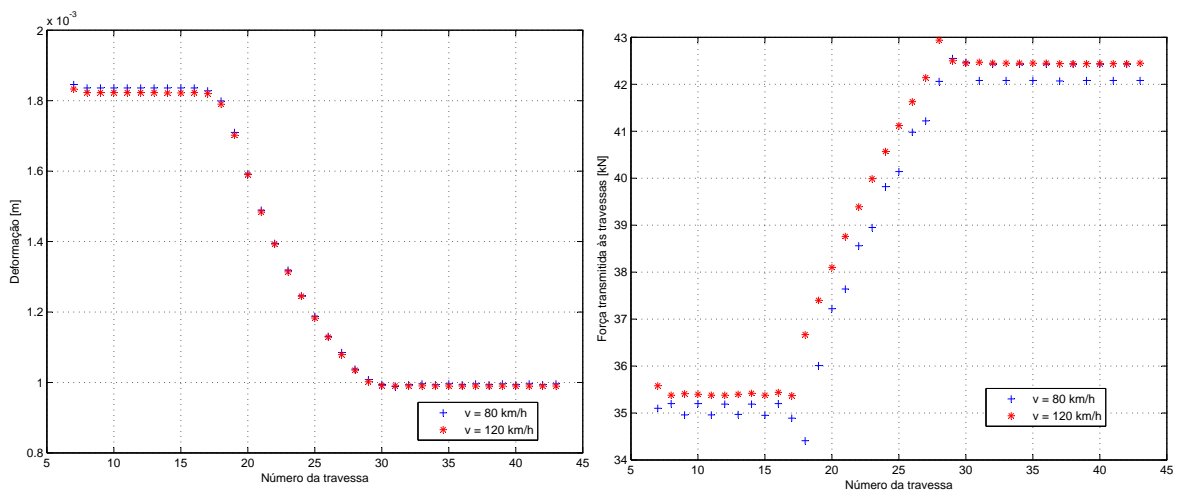


Figura 4.15: Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo *V*



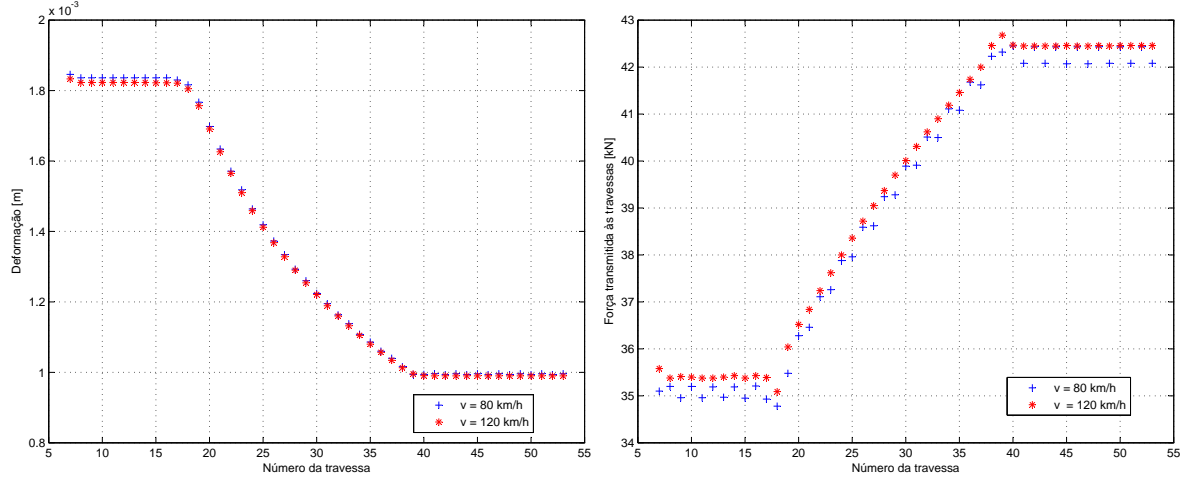


Figura 4.16: Deformação e força transmitida às travessas - Via ferroviária tipo VI

As principais conclusões que se podem retirar da análise destas Figuras, é o facto da diminuição do valor das deformadas se suceder de uma forma mais gradual do que aconteceu para as situações analisadas nas Figuras relativas a uma transição com rigidez constante, sendo que quanto maior o comprimento de transição, mais gradual é a diminuição das deformações.

Em relação à força transmitida às travessas verifica-se o mesmo. No entanto, salienta-se que a última travessa localizada no solo com características medianas, 18 para a via tipo IV, V e VI, e a primeira travessa localizada sobre a ponte, respectivamente a travessa 22, 29 e 39 para a via IV, V e VI, são excepção do que se disse anteriormente, como se visualiza nestas últimas três Figuras do lado direito, pois ocorre uma variação nos valores obtidos.

Apesar disto, quanto maior for o comprimento de transição menor é esta diferença, ou seja, os valores determinados para estas travessas estão mais próximos das restantes. Tal pode verificar-se nas primeiras travessas localizadas sobre a ponte para as Figuras 4.14, 4.15 e 4.16.

Finalmente, as Figuras 4.17, 4.18 e 4.19 apresentam perfis de transmissibilidade para as vias ferroviárias descritas na Tabela 4.7.

Desta forma, a Figura 4.17 compara os resultados obtidos para a via ferroviária tipo I e tipo IV, a Figura 4.18 para a via tipo II e V e, por último, a Figura 4.19 para a via tipo III e VI. Todas elas para uma velocidade de circulação da carga de  $80 \text{ km/h}$ .

Os valores de transmissibilidade apresentados foram determinados através da expressão 4.39:

$$\text{Transmissibilidade}[\%] = \frac{F_{Trav}^i}{Q} \times 100 \quad (4.39)$$

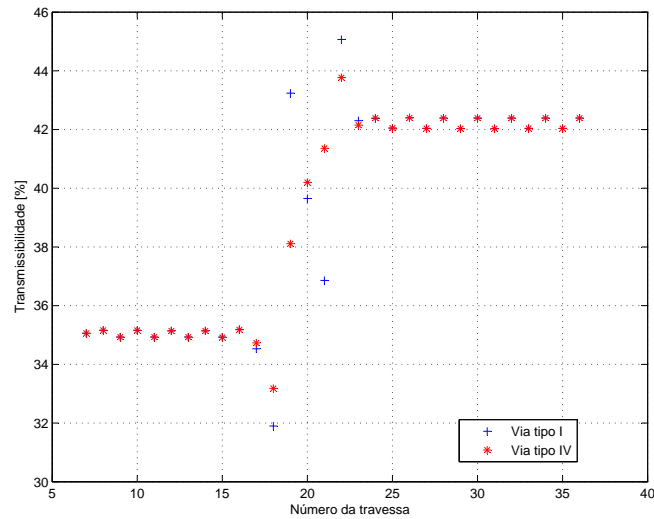


Figura 4.17: Transmissibilidade nas travessas para a via tipo *I* e tipo *IV*, para uma velocidade de  $80\text{km/h}$

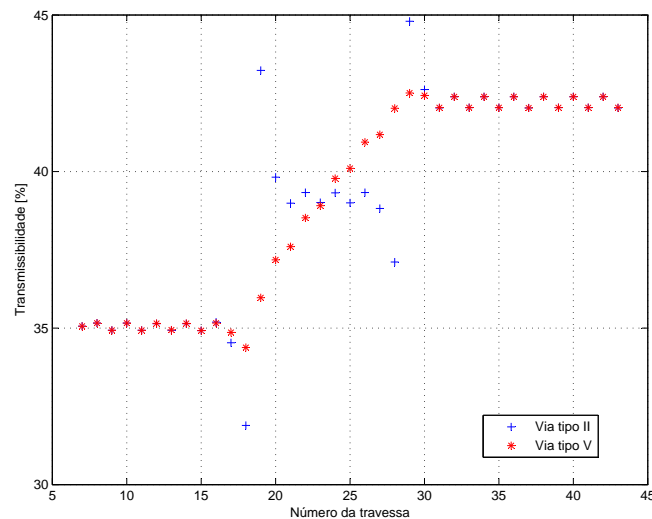


Figura 4.18: Transmissibilidade nas travessas para a via tipo *II* e tipo *V*, para uma velocidade de  $80\text{km/h}$

Todos os perfis de transmissibilidade expostos nestas Figuras, mostram que os resultados são praticamente idênticos, sendo que as principais diferenças ocorrem na zona de transição, onde se confirma o que foi referido anteriormente, ou seja, as vias que possuem um aumento gradual de rigidez conferem uma melhor solução para estas zonas. Contrariamente a esta solução para as vias ferroviárias, as vias que apresentam uma rigidez constante nesta zona apresentam grandes oscilações de valores, acabando por ser prejudicial para o correcto desempenho de uma determinada via.

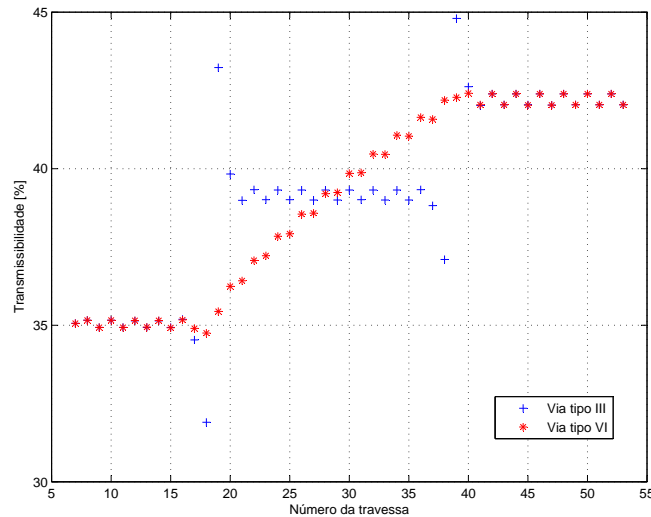


Figura 4.19: Transmissibilidade nas travessas para a via tipo *III* e tipo *VI*, para uma velocidade de  $80\text{km/h}$

## Conclusões

De acordo com Li e David (2005), uma mudança repentina nos valores caracterizadores da rigidez vertical da via, devido à alteração da estrutura da via ferroviária, pode causar inúmeros problemas no correcto funcionamento da mesma, nomeadamente, a degradação geométrica da via, o aumento do desgaste da via e dos próprios componentes do veículo, o assentamento diferencial que se verifica quando a carga de roda se desloca sobre estas diferentes estruturas, provocando por sua vez um efeito adverso na interacção dinâmica do sistema veículo/via.

No entanto, diversos estudos foram efectuados com o objectivo de minorar os possíveis efeitos provocados. Assim, a colocação de uma camada de asfalto, *HMA*, ou de uma laje de betão são apenas dois métodos de reforço da fundação utilizados, de modo a que a mudança de rigidez da via não ocorra de forma abrupta.

No presente Capítulo, a solução adoptada para atenuar este problema foi a colocação de uma camada de *HMA*. Segundo Jenks (2006), quando esta solução for correctamente efectuada, poderá reduzir os esforços e o assentamento diferencial e, consequentemente, aumentar os ciclos de manutenção da via. Por ser uma camada estrutural, como foi referido inicialmente, pode reduzir, também, os esforços do sub-leito para níveis que não excederão a resistência à compressão de solos com baixa resistência.

Em relação aos resultados apresentados na sub-secção 4.2.1, conclui-se que o mais conveniente para uma via ferroviária assente sobre estas condições de fundação, esquematizada na Figura 4.9, é uma solução em que a rigidez da via aumenta de forma gradual, tal como apresentado nas Figuras 4.14, 4.15 e 4.16, pois como se averigua não ocorrem oscilações tão significativas no valor das deformadas nem no valor das forças transmitidas ao balastro como se verifica para a situação em que a rigidez da zona de transição é constante.



## Capítulo 5

# Conclusões

Os esforços originados pela circulação de comboios numa determinada via ferroviária, podem ser facilmente calculados através de um modelo de cálculo matemático, denominado por Modelo de Winkler, criado e desenvolvido com o principal objectivo de avaliar os esforços que surgem nas fundações das vias.

Para uma correcta utilização do modelo referido, e como se viu ao longo do trabalho apresentado, é apenas necessário caracterizar a viga de Winkler através das características geométricas e elásticas, respectivamente o momento de inércia  $I$  e o módulo de elasticidade  $E$ , do material que a constitui para simular o carril, bem como o solo de fundação, representado por um conjunto de molas com determinada rigidez.

Apesar de ser um modelo de fácil utilização, e que por esta razão é utilizado inúmeras vezes, apresenta, contudo, algumas limitações. No entanto, independentemente do modelo de fundação adoptado é essencial compreender o seu comportamento.

Desta forma, segundo Cook e Young (1999) um modelo de fundação de Winkler resiste, somente, a forças colocadas perpendicularmente à viga, não resistindo a forças colocadas paralelamente à sua superfície. Para além disso, esta viga só deforma no ponto de aplicação da carga pelo que, é correcto afirmar que a deformação de uma mola é independente do que se verifica nas restantes.

Outra limitação, é o facto de o solo de fundação e o balastro não serem correctamente representados, pois não tem em consideração o comportamento não-linear dos materiais constituintes da fundação.

Os resultados apresentados na presente dissertação, consideram que o comportamento das molas representativas do solo de fundação é linear. Tal facto não corresponde, como se referiu, ao comportamento real da fundação de uma via ferroviária. Deste modo, um comportamento não-linear da mola representaria de uma forma mais correcta e real o comportamento dos materiais constituintes do solo de fundação.

Salienta-se, também, que os modelos baseados na viga de Winkler, pela sua formulação, são unidimensionais, pelo que, não realizam qualquer previsão quanto ao comportamento no sentido transversal ao deslocamento.

Não obstante, os resultados determinados através deste modelo de cálculo constituem uma

aceitável aproximação à situação real que ocorre em vias ferroviárias.

O parâmetro rigidez vertical da via, utilizado para caracterizar, através do modelo de Winkler, a rigidez das molas que representam o solo de fundação, é um parâmetro básico que qualifica diversos factores de uma determinada via ferroviária, como por exemplo a sua capacidade de carga, o seu comportamento dinâmico e, em particular, a qualidade geométrica da via e o tempo de vida útil dos componentes que a constituem.

Em geral, um valor elevado para a rigidez vertical da via é benéfico, pois proporciona uma resistência suficientemente boa para cargas aplicadas o que faz com que o valor das deformações verificadas na via devido a essas mesmas cargas se reduzam substancialmente e, consequentemente, ocorra uma diminuição na deteiorização global da via.

No entanto, e apesar do que foi dito anteriormente, o facto deste parâmetro apresentar valores elevados não indica que o comportamento geral da via ferroviária exiba somente factores positivos. Assim, o aumento das forças dinâmicas na interface roda-carril, nas travessas e no balastro, são algumas das desvantagens que se verificam e que, desta forma, podem causar algum desgaste e fadiga nos componentes que constituem a via que, com o passar do tempo, podem conduzir a graves problemas na mesma.

Um dos problemas que mais se visualizam em vias ferroviárias consiste na variação de rigidez que ocorre ao longo de toda a sua extensão. Esta variação, se não for realizada de uma forma gradual, pode causar variações nas forças de interação veículo-via e diferentes assentamentos e, portanto, uma deteiorização diferencial da geometria da via e potenciais problemas de vibração da estrutura.

Todos os resultados obtidos e apresentados ao longo desta dissertação, e conforme se teve oportunidade de referir em cada secção, foram determinados através de um programa computacional de cálculo numérico, nomeadamente o *Matlab*.

Foi possível, através da criação de vários programas que recriavam uma via ferroviária sujeita a determinadas condições, compreender o essencial de linguagem de programação e, desta forma, poder utilizar este programa no desenvolvimento de futuros trabalhos.

A principal conclusão que se pode retirar do trabalho aqui desenvolvido é o facto de a solução numérica apresentar resultados muito semelhantes à solução considerada exacta, ou seja, à solução analítica.

Pode-se afirmar então, desta forma, que um modelo numérico baseado no método dos elementos finitos, como aquele que foi desenvolvido no Capítulo 3, secção 3.2, permite, para além de simular de forma realista e completa situações verídicas de determinadas vias ferroviárias, superar as limitações que eventualmente surgem através do cálculo analítico, sendo desta forma uma excelente alternativa a este cálculo.

Assim, seguidamente descrevem-se as principais conclusões que, de acordo com o que foi dito anteriormente, coincidem para o cálculo analítico, e para o cálculo numérico.

Deste modo, verificou-se para os resultados obtidos referentes a uma carga concentrada estática sem variação de rigidez, secções 3.1.1 e 3.2.1, a um comboio de cargas sem variação de

rigidez, 3.1.3 e 3.2.2, e para uma carga concentrada dinâmica sem variação de rigidez, 4.1.1, que o valor das deformações são superiores para um carril do tipo *UIC* – 54, para um solo de classificado como *QS1*, ou seja, de características moles, e quanto maior for o valor da carga de roda aplicada à via.

Ainda relativamente a esta última secção, carga concentrada dinâmica sem variação de rigidez, visualizou-se, também, que o valor da velocidade crítica é atingido mais rapidamente, novamente, para um solo de classe *QS1* e para um carril *UIC* – 54. Como se referiu anteriormente, para além de nestas situações se verificarem maiores valores de deformações, o valor destas aumentam com o respectivo aumento da velocidade de circulação da carga.

Finalmente, para os cálculos efectuados no Capítulo 3, que ainda não foram referidos, o valor dos esforços transmitidos às travessas e a influência que o espaçamento entre estes elementos podem apresentar, respectivamente as sub-secções 3.2.4 e 3.2.5, refere-se, para a primeira, que para um solo mole, *QS1*, o valor das deformações são maiores e, desta forma, os esforços são distribuídos por um maior número de travessas. Assim, o esforço que cada travessa recebe, é menor que o verificado para um solo rijo, de classe *QS3*.

Contrariamente ao descrito anteriormente, para este último tipo de solo, o valor de deformações que se verificam são menores. Consequentemente menor é o número de travessas que recebem esforços e, consequentemente, maior é o valor da carga que é transmitida à travessa localizada por baixo da carga.

Por último, os resultados exibidos na secção 3.2.5 mostram que qualquer que seja o tipo de solo de fundação, o valor da carga de roda aplicada ou o tipo de carril utilizado, quanto maior for o valor do espaçamento entre travessas maior o valor do esforço transmitido à travessa localizada por baixo da carga aplicada. Ao invés, para espaçamentos menores maior é o número de travessas que recebem esforços, pelo que se pode afirmar que para esta situação maior é a redistribuição de esforços.

Na secção 4.2.1 foi realizado, através de um modelo numérico, uma simulação de uma via ferroviária, sujeita a acção de uma carga de roda dinâmica, fundada em diferentes condições de fundação, nomeadamente um solo e uma ponte, sendo que, o principal objectivo aqui estudado, foi a determinação da melhor solução para se proceder a esta transição de rigidez.

Concluiu-se, assim, que a solução mais conveniente para uma via assente sobre estas condições de fundação consiste numa solução em que a rigidez do solo nessa zona de transição aumentou de uma forma progressiva, em vez de apresentar um valor linear, nomeadamente um valor intermédio entre as rigidezes verificadas para o solo e para a ponte.

O aparecimento, em Portugal, de novas linhas ferroviárias que permitem a circulação de veículos de alta velocidade, ou até mesmo a adaptação das linhas convencionais já existentes a estas novas exigências, tem conduzido à necessidade de desenvolvimento de novos estudos.

É recomendável, em detrimento da solução analítica, a utilização de modelos numéricos, dos elementos finitos, das diferenças finitas ou mesmo dos elementos de fronteira, que permitam ultrapassar as limitações das primeiras, pois estes estão limitados a casos simples, quer em termos de geometria da via, quer em termos do comportamento global dos materiais.





# Bibliografia

- Azevedo, A. F. M. (2003). *Sebenta de Método dos Elementos Finitos*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Chopra, A. K. (1995). *Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering*. University of California at Berkeley. Prentice Hall.
- Cook, R. D. e Young, W. C. (1999). *Advanced Mechanics of Materials (Second Edition)*. Prentice Hall.
- Dukkipati, R. V. (2010). *Matlab. An introduction with Applications*. New Age International Publishers.
- Esveld, C. (2001). *Modern Railway Track (Second Edition)*. Delft University of Technology.
- Fryba, L. (1972). *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*. Noordhoff International Publishing, Groningen. Netherlands.
- Jenks, C. W. (2006). Research results digest 79 - design of track transitions. *Transportation Research Board of the National Academies*, páginas 1–37.
- Li, D. e David, D. (2005). Transition of railroad bridge approaches. *Journal of Geotechnical And Geoenvironmental Engineering*, Vol. 131:Pag. 1392–1398.
- LNEC (2009). Norma portuguesa. eurocódigo 8: Projecto de estruturas para resistência aos sismos. parte 1: Regras gerais, acções sísmicas e regras para edifícios.
- Mateus da Silva, J. M. M. (2005). *Propagação e migitação de vibrações de baixa frequência geradas por comboios de alta velocidade*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
- Mylonakis, G., Nikolaou, S., e Gazetas, G. (Setembro 2006). Footings under seismic loading: Analysis and design issues with emphasis on bridge foundations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 26:pp. 824–853.
- Pita, A. L. (2001). La rigidez vertical de la vía y el deterioro de las líneas de alta velocidad. *Revistas de Obras Públicas*, Vol. N.º 3.415:Pag. 7 – 26.
- Priest, J. A. e Powrie, W. (2009). Determination of dynamic track modulus from measurement of track velocity during train passage. *Journal Of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 135:1732 – 1740.

- Teixeira, P. F. (2003). *Contribución a la reducción de los costes de mantenimiento de vías de alta velocidad mediante la optimización de su rigidez vertical*. Tese de Doutoramento. Universitat Politècnica de Catalunya.
- Teixeira, P. F. (2009). *Sebenta de Engenharia Ferroviária. 5.º ano Mestrado Integrado em Eng.ª Civil (2.º semestre)*. Instituto Superior Técnico.
- Varandas, J., Holscher, P., e Silva, M. A. G. (2010a). Dynamic behaviour of railway tracks on transitions. *Relatório para o projecto SMARTRACK - PTDC/EME-PME/101419/2008*, página Pag. 1 a 27.
- Varandas, J., Holscher, P., e Silva, M. A. G. (2010b). Settlement model for ballast at transition zones. *Relatório para o projecto SMARTRACK - PTDC/EME-PME/101419/2008*, página Pag. 1 a 18.